травень 2019 р.

Задачі відбіркового етапу
у табір «Контора Pi 2019»

8 клас

1. У трикутнику ABC кут A в два рази більший за кут B, AL — бісектриса кута A (L лежить на стороні BC). На промені AL відкладений відрізок AK, рівний CL. Доведіть, що $AK = CK$.
2. Дано додатні числа a, b і c. Доведіть, що
$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$
3. Дано цілі числа a і b та просте число p, більше 3. Виявилося, що $a+b$ та a^2+b^2 одночасно діляться на p. Доведіть, що a^2+b^2 ділиться на p^2.
4. **a)** Скільки існує шестизначних чисел, у яких рівно дві парні цифри, які не стоять поруч?
   b) Скільки існує 100-значних чисел, у яких рівно 10 непарних цифр, ніякі дві з яких не стоять поруч?
5. Серед чисел від 1 до 10^{23} яких більше — з двозначною сумою цифр чи з тризначною?
6. В яку найменшу кількість кольорів можна пофарбувати всі натуральні числа так, що будь-які два натуральних числа, що відрізняються в 4 або 8 разів, були пофарбовані в різні кольори?
7. У компанії з 100 людей кожен знайомий рівно з 40 іншими, але ніякі двоє не мають більше 20 спільних знайомих. Доведіть, що з цієї компанії можна вибрати 22-ох людей, яких можна посадити за круглий стіл так, щоб кожен з них був знайомий рівно з одним з двох своїх сусідів.

травень 2019 р.

Задачі відбіркового етапу
у табір «Контора Pi 2019»

9 клас

1. **a)** Скільки існує шестизначних чисел, у яких рівно дві парні цифри, які не стоять поруч?
   b) Скільки існує 100-значних чисел, у яких рівно 10 непарних цифр, ніякі дві з яких не стоять поруч?
2. Дано додатні числа a, b і c. Доведіть, що
$$a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2 \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a).$$
3. На стороні BC трикутника ABC вибрано точку D. Коло, описане навколо трикутника ADB, перетинає сторону AC в точці M, а коло, описане навколо трикутника ADC, перетинає сторону AB в точці N (точки M і N не співпадають з A). Нехай O — центр описаного кола трикутника AMN. Доведіть, що $OD \perp BC$.
4. Скільки розв'язків в натуральних числах, не більших за 1000000, має рівняння
   $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{\text{НСК}(a,\ b)}=\frac{1}{\text{НСД}(a,b)}$ за умови $b \geq a$?
5. Яку найбільшу кількість ферзів чорного і білого кольору можна розставити на шахівниці так, щоб ніякі два ферзя одного кольору не били один одного? (Ферзі не б'ють один крізь одного)
6. Дано 10 різних непарних простих чисел. Чи може так статися, що різниця 16-их степенів будь-яких двох з них ділиться на будь-яке з решти чисел?
7. Нехай BL бісектриса гострокутного рівнобедреного трикутника ABC, H — його ортоцентр, точка — K симетрична точці L відносно центра описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $BK > HL$.
8. Натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_n$ задовольняють умову:
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1.$$
   Доведіть, що кожне з цих чисел не перевищує n^{2^n}.

травень 2019 р.

Задачі відбіркового етапу
у табір «Контора Pi 2019»

10 клас

1. Доведіть, що для будь-яких натуральних *a, b* і *c* виконується нерівність:

$$[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]\ge[a,b,c]^2 .$$

2. **a)** Скільки існує шестизначних чисел, у яких рівно дві парні цифри, які не стоять поруч?

b) Скільки існує 100-значних чисел, у яких рівно 10 непарних цифр, ніякі дві з яких не стоять поруч?

3. У чотирикутнику $ABCD$ кути при вершинах A і C — прямі. З вершин B і D на діагональ AC опущено перпендикуляри BX і DY. Доведіть, що $AX = CY$.

4. Яку найбільшу кількість ферзів чорного і білого кольору можна розставити на шахівниці так, щоб ніякі два ферзя одного кольору не били один одного (ферзі не б'ють один крізь одного)?

5. Для додатних x, y та z доведіть нерівність:

$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}\le 2(x+y+z) .$$

6. Дано 10 різних непарних простих чисел. Чи може так статися, що різниця 16-их степенів будь-яких двох з них ділиться на будь-яке з решти чисел?

7. На площині відмічено 2017 точок так, що відстань між будь-якими двома з них більше 1. Доведіть, що відстань між якимось двома із зазначених точок складає хоча б 35.

8. Точка M — середина основи BC трапеції $ABCD$. На основі AD вибрано точку P. Пряма PM перетинає пряму CD в точці Q, причому C лежить між Q і D. Перпендикуляр до основ, проведений через точку P, перетинає BQ в точці K. Доведіть, що $\angle QBC = \angle KDA$.

9. Натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_n$ задовольняють умову:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1.$$

Доведіть, що кожне з цих чисел не перевищує n^{2^n} .