

Завдання для відбору у математичний табір “Контора Пі” (вчителі, осінь 2019)



1. Дійсні числа x, y та a такі, що
$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$$
 При якому значенні a добуток xy буде найменшим?
2. Одне коло описане навколо рівностороннього трикутника ABC , а друге дотикається до прямих AB і AC , а також до першого кола. Знайдіть відношення радіусів цих кіл.
3. На телеграфному дроті на відстані 1 м один від одного сиділи $2n$ горобців. Потім вони злетіли в повітря та знову розсілися на дроті на тих самих місцях, але вже в іншому порядку. Чи завжди знайдуться такі три горобці, що жодна з відстаней між ними після перельоту не збільшиться?
4. Нехай a і b – такі цілі числа, що $a^2 + b^2$ ділиться на 499 . Доведіть, що кожне з чисел a і b також ділиться на 499 .
5. На деякій математичній олімпіаді запропоновано таку задачу:
«Якщо групі з k хлопців у сукупності подобаються $p < k$ дівчат, то число $d = k - p$ назвемо дефіцитом. У деякій групі з 30 хлопців максимальний (серед усіх підмножин хлопців) дефіцит дорівнює $d = 20$. Чи завжди можна гарантувати існування такої підмножини з 10 хлопців, кожний з яких зможе обрати по унікальній дівчині, яка йому подобається?»
Розв'яжіть цю задачу. Вкажіть, чи є наведене нижче розв'язання одного з переможців цієї олімпіади правильним, частково правильним (вкажіть недоліки) або неправильним (обґрунтуйте чому). Скільки балів Ви б поставили за таке розв'язання (максимальна кількість балів дорівнює 76)?
«Так. Оберемо хлопця та дівчину, яка подобається цьому хлопцю, і виключимо цю пару з розгляду. Будемо так робити доти, доки є хоча б один хлопець, якому подобається хоча б одна дівчина. Нехай у такий спосіб вдалося сформувати менше 10 пар. Повернемо всі ці пари назад до розгляду. Тоді усій групі з 30 хлопців сумарно подобається не більше 9 дівчат. Отже, дефіцит для цієї групи хлопців не менше 21 . Отримали суперечність.»
6. На початку 10 хвилинної перерви до Вас звернувся учень 9 го класу з проханням пояснити, що таке число e . Напишіть ймовірний діалог, який міг би виникнути.
7. До Вашого навчального закладу планують взяти ще одного вчителя математики для роботи в 5 - 11 класах. Вам доручено провести співбесіду, щоб перевірити математичну компетенцію кандидата. Наведіть умови трьох завдань зі шкільного курсу математики, які б Ви запропонували для співбесіди. Які ще 2 - 3 питання Ви задали б кандидату?
8. До тижня математики Вам доручено організувати зустріч учнів Вашого закладу з гостем. Кого Ви б запросили і чому? У якій формі Ви б планували провести таку зустріч?