

Завдання відбору до математичного табору “Контора Пі” (вчителі, весна 2020)



Шановні вчителі!

Для участі у відборі Вам треба виконати запропоновані нижче завдання. Розбірливо запишіть відповіді на папері або наберіть на комп'ютері. Відповідь на кожне завдання прохання давати на окремому аркуші. Не забувайте, будь ласка, вказувати номер завдання. Зберіть ваші відповіді (якісні фото або скани) в **один pdf файл** в порядку від першого завдання до десятого і до 9 лютого 2020р надішліть на адресу info@kontorapi.com.ua. Прохання виконувати завдання самостійно. У випадку списування робота буде анульована, про що ми повідомимо на сайті Контори Пі та її сторінках у соціальних мережах. Бажаємо успіхів!

Розв'язуємо задачі

1. Кравець має два шматки однакової тасьми загальною довжиною 35 м. Йому треба відрізати шість кусків тасьми довжиною 1 м, 2 м, 3 м, 7 м, 10 м та 11 м. Чи завжди він це зможе зробити?
2. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ – непарні натуральні числа, серед яких можуть бути однакові. Чи може виявитися так, що

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2020}} = 5?$$

3. На стороні AC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) позначили таку точку X , що $AX = BC$. Знайдіть кут XBC , якщо кут A дорівнює 20° .
4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} ab + bc + ca = 1, \\ a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b. \end{cases}$$

Перевіряємо роботи

Завдання 5 і 6 складаються з умов задач деяких олімпіад і розв'язань, які запропонували учасники. З'ясуйте, чи є ці розв'язання правильними. Якщо вони містять недоліки, вкажіть їх і спробуйте виправити. Оцініть розв'язання учасників в балах (від 0 до 7 балів).

5. Знайдіть найменше значення функції $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - x + 3)$.

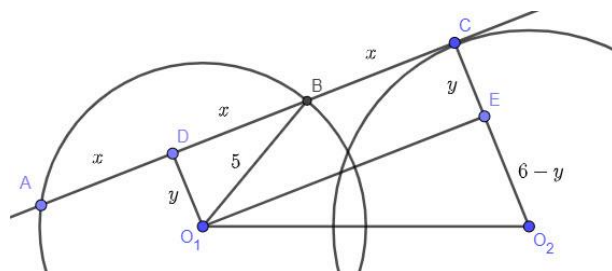
Розв'язання. Маємо $f(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 - x + 3)$. Якщо $x^2 - x = t$, то $f(t) = (t - 2)(t + 3) = t^2 + t - 6$.

Найменше значення тричлена $t^2 + t - 6$ дорівнює $-\frac{25}{4}$ і досягається при $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $-\frac{25}{4}$.

6. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 10. Радіус одного з цих кіл становить 5, іншого – 6. Деяка пряма перетинає менше коло в точках A та B і дотикається більшого кола в точці C . Знайдіть довжину хорди AB , якщо $AB = 2BC$.

Розв'язання. Нехай O_1 і O_2 – центри кіл, D – середина відрізка AB , а пряма O_1E перпендикулярна O_2C . Тоді $DBEO_1$ – прямокутник. Якщо $AB = 2x$ і $DO_1 = y$, то з трикутника



BDO_1 маємо рівність $25 = x^2 + y^2$, а з трикутника O_1EO_2 – рівність $100 = (2x)^2 + (6 - y)^2$.
Розв'язавши систему цих двох рівнянь, знаходимо, що $y^2 = 2$ і $AB = 2x = 2\sqrt{23}$.

Допомагаємо учням

7. На початку перерви учні 8го класу почали сперечатися біля дошки. Один каже, що

$$-1+1-1+1-1+\dots = (-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 0,$$

а інший стверджує, що

$$-1+1-1+1-1+\dots = -1+(1-1)+(1-1)+\dots = -1.$$

Напишіть можливий діалог, як би Ви допомогли учням (інакше вони можуть спізнитися на урок).

Покращуємо систему освіти

8. Вас залучили до складу районної комісії з атестації педагогічних працівників. Які питання Ви задали б вчителям, які проходять атестацію?
9. Вас залучили до робочої групи, яка розробляє програму курсів підвищення кваліфікації вчителів математики. З яких складових Ви б порекомендували скласти програму курсів? Яка може бути кінцева мета цих курсів?

Їдемо у табір

10. Напишіть, які результати Ви очікуєте від участі в таборі. Як плануєте використовувати їх у майбутньому?