

Навчальний предмет. Алгебра та початки аналізу

Автор. Кучеренко Раїса Дмитрівна, викладач математики ДПТНЗ "Переяслав-Хмельницький центр професійно-технічної освіти", м. Переяслав-Хмельницький

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту

Тема. Показникова та логарифмічна функції

Тема уроку. Логарифми та їх властивості

Тип уроку. Комбінований

Мета уроку:

✎ *навчальна:* формування поняття логарифма числа, десяткового логарифма; засвоєння властивостей логарифмів; формувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання означення та властивостей логарифмів;

✎ *розвивальна:* розвиток пізнавального інтересу до математики, розвиток логічного та аналітичного мислення, техніки обчислень, творчої та розумової активності;

✎ *виховна:* сприяння розвитку творчої діяльності учнів, потреби до самоосвіти, виховання культури спілкування, впевненості у своїх силах, любові до математики

Обладнання: персональний комп'ютер, мультимедійний проектор

Дидактичний матеріал та наочні посібники: учительська презентація "Логарифми та їх властивості", створена в MS PowerPoint, тести на платформі Classtime, аудиторна дошка, роздатковий матеріал, підручник Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти/ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. - К.: Видавничий дім "Освіта", 2019. - 272 с.: іл.

Норма часу: 45 хвилин

Епіграф до уроку: "Винахід логарифмів, скоротивши роботу астронома, продовжив йому життя" П. Лаплас

Хід уроку

I. Організаційний момент:

1. Привітання.
2. Перевірка присутності учнів.

Доброго дня. Пам'ятаєте, ми з вами якось говорили, що алгебру називають арифметикою семи дій. Це добре вам відомі ще з початкової школи додавання, віднімання, множення та ділення, а також три дії, які вивчаються пізніше - піднесення до степеня, добування кореня та знаходження логарифмів.

II. Мотивація навчальної діяльності учнів та повідомлення теми, мети і завдань роботи

Саме з останньою, сьомою, дією арифметики ми з вами сьогодні познайомимося. До речі, про використання логарифмів у різних галузях я пропонувала вам самостійно відшукати інформацію та підготувати коротенькі доповіді. (Додаток 1)

Триста років тому в епоху Відродження почався бурхливий розвиток науки, техніки і мореплавства. Розвиток астрономії, а точніше астрономічних спостережень, вимагали нових методів обчислень, які були б доступні широкому колу людей. В основу таких методів і були покладені логарифми.

Винайденню логарифмів значною мірою сприяли потреби удосконалення обчислень.

III. Пояснення нового матеріалу

Легко переконатися, що рівняння $2^x=4$ має корінь $x=2$, рівняння $2^x=8$ має корінь $x=3$. А який корінь має рівняння $2^x=6$?

Зрозуміло, що це число більше за 2 і менше за 3. Але як його записати?

Нехай число $a > 0$ і $a \neq 1$. Якщо рівність $a^x = b$, правильна, то число x називають **логарифмом числа b за основою a** .

Тобто, логарифмом числа b за основою a називають показник степеня, до якого слід піднести число a , щоб отримати число b . Записують $x = \log_a b$.

Наприклад:

$$\log_5 25 = 2, \text{ бо } 5^2 = 25;$$

$$\log_{0,5} 32 = -5, \text{ бо } 0,5^{-0,5} = 32$$

Знаходження логарифма числа називають логарифмуванням. Ця операція є оберненою до операції піднесення до степеня з відповідною основою.

Основна логарифмічна тотожність:

$$\left. \begin{array}{l} a^x = b \\ x = \log_a b \end{array} \right\} \Rightarrow a^{\log_a b} = b$$

Основні властивості логарифмів

$$\underline{(a, b > 0; a, b \neq 1; x, y > 0)}$$

$$(1) a^{\log_a x} = x$$

$$(2) \log_a a = 1$$

$$(3) \log_a 1 = 0$$

$$(4) \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$(5) \log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$(6) \log_a (x^p) = p \log_a x$$

$$(7) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$(8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Спеціальні позначення:

$\lg x = \log_{10} x$ - десятковий логарифм;

$\ln x = \log_e x$ - натуральний логарифм ($e \approx 2,71828$ неперове число, математична константа)

IV. Осмислення, узагальнення та систематизація знань

1. Інтелектуальна розминка.

Усне виконання вправ (вправи демонструються на презентації):

$$1) \log_5 125 = \dots (3);$$

$$2) \log_{\frac{1}{3}} 9 = \dots (-2);$$

$$3) \log_7 \frac{1}{49} = \dots (-2);$$

$$4) \log_{\sqrt{2}} 8 = \dots (6);$$

$$5) \log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = \dots (3);$$

$$6) 4^{\log_4 8} = \dots (8).$$

2. Коментоване розв'язування вправ на дошці:

№ 126 Знайти x за даним логарифмом:

$$a) \log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 x;$$

Розв'язання:

$$\log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 \left(27 \cdot \frac{1}{3} \right) = \log_5 3 \Leftrightarrow x=3$$

$$б) \log_5 x = \frac{1}{3} \log_5 8 - 2;$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{3} \log_5 8 - 2 = \log_5 8^{\frac{1}{3}} = \log_5 2 \Leftrightarrow x=2$$

$$в) \log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 x;$$

Розв'язання:

$$\log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 (120 : 15) = \log_3 8 \Leftrightarrow x=8$$

$$г) \log_{20} x = 1 + \log_{20} 10;$$

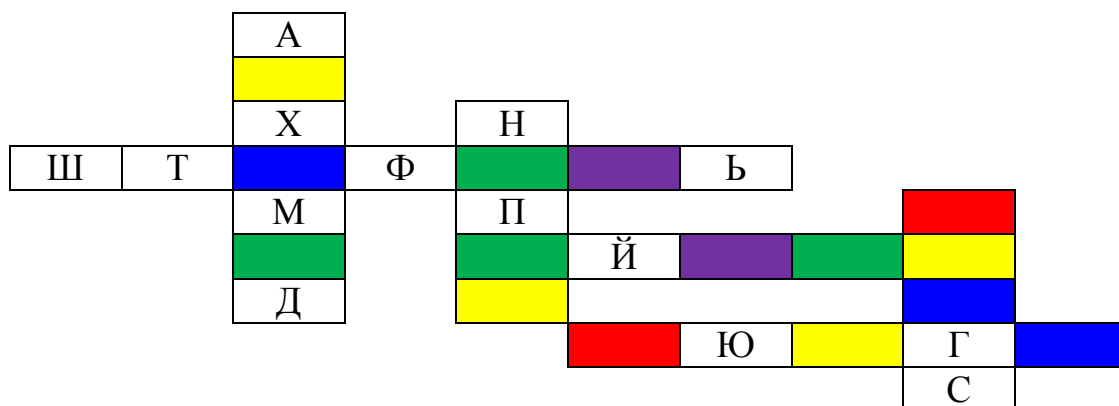
Розв'язання:

$$1 + \log_{20} 10 = \log_{20} 20 + \log_{20} 10 = \log_{20} (20 \cdot 10) = \log_{20} 200 \Leftrightarrow x=200$$

3. А зараз я пропоную вам розгадати кросворд, точніше закінчити його розгадування, відкривши літери, яких не вистачає. А відкривати ці літери ми будемо, обчислюючи логарифми та використовуючи таблицю кодів (число визначає номер літери українського алфавіту).

А-1	Б-2	В-3	Г-4	Д-5	Е-6	Є-7	Ж-8
З-9	И-10	І-11	Ї-12	Й-13	К-14	Л-15	М-16
Н-17	О-18	П-19	Р-20	С-21	Т-22	У-23	Ф-24
Х-25	Ц-26	Ч-27	Ш-28	Щ-29	Ю-30	Я-31	Ь-32

(Учні отримують завдання на різнокольорових картках, колір картки відповідає кольору зафарбованої клітинки кросворду)



$$1) \frac{\log_3 625}{\log_3 5} \cdot (\lg 500 + \lg 200) = \log_5 625 \cdot \lg 100000 = 4 \cdot 5 = 20 \quad (P)$$

$$2) \log_2 24 - \log_2 3 + e^{\ln 8} = \log_2 \frac{24}{3} + 8 = \log_2 8 + 8 = 3 + 8 = 11 \quad (D)$$

$$3) \log_{253} \log_3 \log_2 8 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = \log_{253} \log_3 3 + 2 = \log_{253} 1 + 2 = 0 + 2 = 2 \quad (Б)$$

$$4) \log_7 49^5 - \log_2 \frac{1}{32} = 5 \log_7 49 - (-5) = 5 \cdot 2 + 5 = 15 \quad (Л)$$

$$5) \frac{2 \lg 4 + \lg 4}{3 \lg 2 - \lg 4} = \frac{3 \lg 4}{\lg 2^3 - \lg 4} = \frac{\lg 4^3}{\lg \frac{8}{4}} = \frac{\lg 64}{\lg 2} = \log_2 64 = 6 \quad (Е)$$

Отже, нам відкрилися імена таких учених:

Архімед - перші зародки поняття логарифма можна знайти в Архімеда, але сама ідея розвитку не набула.

Непер - 20 років присвятив Джон Непер своїм логарифмічним таблицям, аби, за його словами, «позбутися нудних і тяжких обчислень, відлякують зазвичай багатьох від вивчення математики». Непер видав свій «Опис дивовижної таблиці логарифмів» на 6 років раніше, ніж Бюргі. Тому і визнали число e неперовим числом.

Брігс - ідея десяткових логарифмів виникла у професора лондонського коледжу Генрі Брігса (1561-1630) після ознайомлення з таблицями Непера. Він двічі побував у Непера, здружився з ним і в процесі спільних занять обидва розробили нову, практично зручнішу десяткову систему. Брігс взявся розробити велику таблицю десяткових логарифмів. Уже в 1617 р. він опублікував восьмизначні таблиці логарифмів від 1 до 103, а в 1624 році спромігся видати «Логарифмічну

арифметику», що містила чотирнадцятизначні таблиці логарифмів для чисел 1-20000 і 90000-100000. Понад три з половиною століття вони вірою і правдою служили астрономам і геодезістам, інженерам і морякам.

Штіфель - ідея, якою скористалися Непер та Бюргі належала Міхаелю Штіфелю, але він не розвинув її в своїх працях.

Ейлер - на честь видатного математика Леонарда Ейлера назвали число e . До теперішнього часу з друку вийшло 67 томів його праць і готується ще 5. Останні роки свого життя він майже осліп, але не переставав працювати.

Бюргі - швейцарець Йост Бюргі, знаний годинникар і майстер астрономічних інструментів вважається винахідником логарифмів. Саме величезний обсяг необхідних в астрономії обчислень і спонукав Бюргі і шукати шляхів для їх спрощення. Бюргі працював над таблицями 8 років і видав їх у 1620 році під назвою «Арифметична і геометрична таблиця прогресії».

4. Мозковий штурм

Наступне, що хотілося б мені запропонувати вашій увазі, - дотепну, на мій погляд, задачу, якою розважалися учасники одного з'їзду фізиків в Одесі. Задача полягає в тому, щоб будь-яке ціле додатне число записати за допомогою трьох двійок та математичних символів.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 3 &= -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = -\log_2 \log_2 \left(\left((2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = \\ &= -\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \left(\frac{1}{8} \right)^{-1} = \log_2 8 = 3 \end{aligned}$$

$$4 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$$

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt[N]{4 \cdot 2 \cdot 2}$$

N раз

V. Рефлексія

1. Учні відповідають на питання on-line тесту на платформі Classtime (Додаток 2)
2. Мікрофон. Учні відповідають на запитання *"Що цікавого ти дізнався та запам'ятав на уроці?"*
3. Виставлення оцінок

VI. Домашнє завдання

Вивчити властивості логарифмів, № 110, 127

Отже, сьогодні на уроці ми дізналися, що називається логарифмом, вивчили основні властивості логарифмів та навчилися застосовувати їх при розв'язуванні задач. Крім того, сподіваюся, ви запам'ятали прізвища вчених, які винайшли логарифми. Думаю вам сподобалися цікаві доповіді про зв'язок логарифмів з музикою, зірками, шумом та про зв'язок логарифмічної спіралі з природою.

Урок закінчено. До побачення.

Логарифми в музиці

Музиканти надзвичайно рідко захоплюються математикою, більшість з них поважає цю науку, але воліє триматись від неї подалі. Між тим музиканти стикаються з нею набагато частіше, ніж самі підозрюють, причому з такими страшними речами, як логарифми.

Виявляється, що номер клавіші рояля являється логарифмом кількості коливань відповідних звуків. Номер октави та номер звуку в даній октаві теж виражається за допомогою логарифмів.

Зірки, шум та логарифми

Виявляється, що гучність шуму та яскравість зірок теж оцінюються за логарифмічною шкалою. І це не випадково, оцінюючи гучність шуму та яскравість зірок, ми маємо справу з наслідком психо-фізичного закону Фехнера, який говорить: величина відчуття пропорційна логарифму величини роздратування.

Логарифми у природі

Спіраль - це крива лінія, яка багаторазово обходить одну з точок на площині. У логарифмічній спіралі куту повороту пропорційний логарифм відстані. Біологи вважають саме цю спіраль свого роду стандартом біологічних об'єктів різної природи.

Наприклад, раковини морських тварин можуть рости лише в одному напрямку - по логарифмічній спіралі.

Роги гірських козлів архарів теж закручені по логарифмічній спіралі.

У соняшника насіння розташовується по дугам, близьким до логарифмічної спіралі.

Тести

1. $\log_{12}3 + \log_{12}4 =$

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 12; Д) 0

2. $\log_3 15 - \log_3 5 =$

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 12; Д) 0

3. Яку основу має $\lg x$?А) 1; Б) 2; В) e ; Г) 10; Д) a 4. Яку основу має $\ln x$?А) 1; Б) 2; В) e ; Г) 10; Д) a

5. За означенням логарифма вказати, яке твердження справедливе ?

А) логарифм – показник степеня;

Б) логарифм – основа степеня;

В) логарифм – степінь.

6. $\log_5 1 =$

А) 0; Б) 1; В) 5; Г) 10; Д) e

7. $\log_5 5 =$

А) 0; Б) 1; В) 5; Г) 10; Д) e 8. Якою може бути основа логарифма $\log_a x$?А) $a > 0$; Б) $a < 0$; В) $a = 0$; Г) $a = 1$; Д) $a \neq 1$

9. $10^{\lg 8} =$

А) 0; Б) 1; В) 8; Г) 10; Д) e

10. $e^{\ln 8} =$

А) 0; Б) 1; В) 8; Г) 10; Д) e