**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**О.О. Приходько, В.Б. Шевченко,
Л.В. Задорожна, А.В. Чумаченко**

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

методичні рекомендації до практичних занять

Київ, 2020

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №11 від 24 лютого 2020 року)

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук, проф. Момот. А.І.
к-т фіз.-мат.наук, доц. Майко Н.В.

О.О. Приходько, В.Б. Шевченко, Л.В. Задорожна, А.В. Чумаченко. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: методичні рекомендації до практичних занять.

Методичні рекомендації до практичних занять з курсу „Лінійна алгебра та аналітична геометрія" містять докладний план практичних занять та обов'язкові задачі на перший та другий семестри даного курсу, додаток з прикладами розв'язування деяких задач, список збірників задач, які використовуються на практичних заняттях.

Видання призначено для студентів першого курсу фізичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка та викладачів, що проводять практичні заняття..

Зміст

План практичних занять та обов’язкові задачі на перший та другий семестри

Тема І. Пропедевтика /6 год./

<u>*Примітка:*</u> **Матеріал семінарів 1, 2 та 3 необхідний при вивченні загального курсу фізики найближчим часом і подається студентам без лекційного викладу правил і прийомів обчислення.**

Заняття N 1. ***Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), в яких кількість рівнянь співпадає з кількістю невідомих, методом Крамера***

1. Поняття матриці. Квадратна та прямокутна матриці. Визначник матриці. Обчислення визначника матриці другого порядку: N 1, 3, 5, 7, 11, 19, 21.
2. Розв'язування СЛАР другого порядку методом Крамера: N 23, 25, 27.
3. Дослідження СЛАР на сумісність (існування єдиного розв’язку або безлічі) та несумісність (розв’язку не існує), користуючись формулами Крамера: N 29, 31, 37.
4. Обчислення визначників третього порядку двома способами: за рядком (або стовпчиком) і “зіркою”: N 43, 45, 47, 53, 68, 70.
5. Розв'язування СЛАР третього порядку методом Крамера: N 75, 77, 82, 87, 89.
6. Розкриття визначника довільного порядку за рядком або стовпчиком. Поняття мінора та алгебраїчного доповнення. Розв'язування СЛАР довільного (скінченного) порядку.

<u>*Примітка:*</u> Усі приклади вказані за збірником задач [1].
Домашнє завдання: 2, 4, 6, 13, 18, 22, 24, 35, 44, 57, 62, 69, 82, 84, 86, 93, 96, 97.

Заняття N 2. ***Вектори: скалярний, векторний, мішаний та подвійний векторний добутки***

1. Поняття геометричного вектора. Поняття базису та базисних векторів (ортонормований базис: $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). Координати вектора відносно базису. Модуль (довжина) вектора. Направляючий орт і направляючі косинуси вектора: N 750, 752, 748, 754,757,780.
2. Лінійні операції над векторами:N 761, 763, 769.
3. Скалярний добуток геометричних векторів в довільному і ортонормованому базисах. Знаходження кута між векторами за допомогою скалярного добутку. Застосування скалярного добутку при обчисленні фізичних величин:N 812, 813, 816, 818, 821.
4. Векторний добуток геометричних векторів. Права та ліва трійка векторів (правий і лівий базиси). Застосування векторного добутку при обчисленні фізичних величин: N 839, 850(1), 852, 854, 859.
5. Мішаний добуток геометричних векторів. Визначення базису (лівий чи правий) за допомогою мішаного добутку: N 865, 873.
6. Подвійний векторний добуток векторів. Формули Лагранжа:$\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),\ \left[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$. N 864.

<u>*Примітка:*</u> Усі приклади вказані за збірником задач [2].
Домашнє завдання: N 749, 751, 753, 762, 766, 770, 781, 794, 804, 815, 819, 837, 851, 853, 855, 860, 867, 883(1-5,7).

Заняття N 3. ***Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Перетворення систем координат***

1. Проекція відрізка на довільну вісь, довжина і полярний кут відрізка. Відстань між точками, поділ відрізка в даному відношенні (на площині і у просторі): N 44, 52, 63(2), 73, 78, 95, 726(3), 728, 739, 742, 803, 806.
2. Знаходження площі трикутника та паралелограма (геометрична інтерпретація векторного добутку) на площині і у просторі: N 116(1), 119, 857.
3. Знаходження об'єму паралелепіпеда та тетраедра (геометрична інтерпретація мішаного добутку). Критерії колінеарності та компланарності векторів: N 776, 874(1), 876.
4. Поняття системи координат. Перенесення початку системи координат: N 127, 129(1).
5. Поворот системи координат у площині: N 131(1-3), 133(1,4).
6. Складне лінійне перетворення: N 138, 141, 143, 144.

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [2].
Домашнє завдання: N 48, 50, 101, 104, 118, 122, 128, 130, 132, 134, 137, 140, 142, 145, 727, 741, 777, 809, 821, 824, 858, 875, 877. Підготуватись до самостійної роботи по темі “Пропедевтика”.

Тема II . Матриці і визначники /6 год./

Заняття N 4. ***Обчислення визначника матриці довільного порядку***

1. Властивості визначників. Формула повного розкладу визначника: N 188, 190, 212, 216, 221, 232, 243.
2. Найбільш вживані методи обчислення визначників:
а) метод приведення визначника матриці до трикутної форми

(використовуючи елементарні перетворення рядків і стовпчиків): N 270, 279;
б) метод виділення лінійних множників: N 289;
в) метод рекурентних співвідношень: N 297;
г) метод представлення визначника у вигляді суми визначників: N 305.
3. Мінори. Алгебраїчне доповнення. Формула Лапласа: N 421, 425, 427, 432.
4. Диференціювання визначника: знайти похідну від визначника, не розкриваючи його:

а) $\begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \ln x & 2x \\ \sin x & e^x \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} e^x & \cos x & x^3 \\ 2x & \frac{1}{x} & \ln x \\ \tan x & \cosh x & x^4 \end{pmatrix}$.

<u>*Примітка:*</u> Усі приклади вказані за збірником задач [1].

Приклад обчислення визначника методом приведення визначника матриці до трикутної форми та методом представлення визначника у вигляді суми визначників наведено в додатку (приклад 1).

Домашнє завдання: N 191,198, 207 225, 226, 234, 278, 280, 281, 292, 300, 308, 310, 327, 358, 423, 426, 433, 469.

Заняття N 5. ***Дії над матрицями***

1.Додавання матриць та множення матриці на число: N 15.2 (за збірником задач [3]).
2. Транспонована матриця. Ермітовоспряжена матриця. Симетрична, антисиметрична та ермітова (самоспряжена) матриці. Слід матриці: N 15.12 (за збірником задач [3]), 887, 817, 814 (за збірником задач [1]).

3. Множення матриць однакового порядку: N 788, 790 (за збірником задач [1]).
4. Поняття впорядкованості (“зв’язності”) матриць і множення матриць довільного розміру: N 15.5, 15.6, 15.8, 15.10 (за збірником задач [3]).
5. Властивості множення матриць: асоціативність, транспонування добутку матриць, комутатор матриць. Порахувати комутатор матриць Паулі. Означення і застосування символу Леві-Чевіта.
6. Підняття матриці до степені: N 799, 802, 804 (за збірником задач [1]), 15.11 (за збірником задач [3]).
7. Многочлен від матриці: N 827 (за збірником задач [1]).
8. Добуток визначників: N 467, 468 (за збірником задач [1]).
Примітка: Звернути увагу на не комутативність множення матриць.
Домашнє завдання: N 789, 791, 792, 793, 794, 800, 803, 805, 811, 815, 828, 886, 889. Усі приклади вказані за збірником [1]. Побудувати всі можливі добутки і комутатори матриць Дірака.

Заняття N 6. ***Обчислення рангу матриці. Побудова оберненої матриці***
1. Базисний мінор. Ранг матриці. Знаходження рангу матриці (як порядок базисного мінору) методом “огинання” мінорів: N 608, 610.
2. Знаходження рангу матриці (як кількість лінійно незалежних рядків або стовпчиків матриці) методом Гауса: N 619, 621, 612.
3. Обернена матриця. Побудова оберненої матриці методом Гауса: N 836, 839, 842, 854.

4. Побудова оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень: N 836, 839, 843. Побудувати обернену матрицю до кожної з матриць Паулі.
5. Ортогональна та унітарна матриці. Перевірити матриці Паулі і матрицю повороту векторів на площині на ортогональність та унітарність.
6. Матриці елементарних перетворень. Представлення невироджених матриць у вигляді добутку матриць елементарних перетворень: N 15.51 (за збірником задач [3]).

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [1].

Приклад знаходження рангу матриці методом Гауса та побудови оберненої матриці методом Гауса наведено в додатку (приклад 2,п.1 та приклад 3,п.2).

Домашнє завдання: N 609, 611, 620, 622, 635, 818, 837, 845, 849, 891, 893, 894, 936. Підготуватись до самостійної роботи по темі “Матриці і визначники”.

Тема III. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) /4 год./

Заняття N 7. ***Знаходження НФСР та ФСР однорідних СЛАР та побудова загального розв’язку неоднорідних СЛАР***

1. Знаходження базисного мінору, базисних та параметричних змінних. Побудова нормальної фундаментальної системи розв’язків (НФСР) однорідної СЛАР: N 724
2. Побудова фундаментальної системи розв’язків (ФСР) однорідної СЛАР: N 724
3. Дослідження на сумісність неоднорідної СЛАР (критерій Кронекера-Капеллі): N 687, 689, 691, 693, 695.

4. Знаходження частинного розв'язку неоднорідної СЛАР: N 689, 691, 695.
5. Побудова загального розв'язку неоднорідної СЛАР: N 689, 691, 695.

Примітки: Усі приклади вказані за збірником задач [1].
Приклад знаходження НФСР та ФСР однорідних СЛАР та побудови загального розв'язку неоднорідних СЛАР наведено в додатку (приклад 2).

Домашнє завдання: N 690, 692, 694, 696, 700, 728, 729.

Заняття N 8. ***Інші методи розв'язування СЛАР***

1. Розв'язування СЛАР методом Гаусса (метод виключення): N 706, 708, 710.
2. Метод Крамера як наслідок теореми Кронекера-Капеллі. Розв'язування СЛАР методом Крамера: N 554, 693.
3. Розв'язування СЛАР матричним методом (або методом оберненої матриці): N 22, 74.
4. Розв'язування СЛАР з параметрами: N 712, 715.

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [1].

Домашнє завдання: N 707, 709, 713, 716, 719, 721, 76.
Підготуватись до самостійної роботи по темі "Розв'язування СЛАР".

Тема IV. Лінії та поверхні першого порядку /6 год./

Заняття N 9. ***Площина***

1. Векторне та параметричне рівняння площини, рівняння площини, що проходить через три точки: N 913, 914, 917, 921
2. Загальне рівняння площини: N 926, 928.
3. Неповне рівняння площини, рівняння "у відрізках": N 945, 949, 952.

4. Нормальне рівняння площини: N 956, 958.
5. Взаємне розташування площин. Ознака паралельності площин. Відстань між площинами: N 964, 966.

Примітка: Звернути увагу на запис векторного рівняння площини, що проходить через дану точку і направляючі вектори та, що проходить через точку і вектор нормалі. Звернути увагу на зв'язок векторного рівняння з іншими рівняннями площини. Одержати загальне рівняння з векторного, а неповне і нормальне із загального.

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [2].

Домашнє завдання: N 915, 918, 927, 947, 950, 957, 960, 971.

Заняття N 10. ***Рівняння прямої в просторі та на площині***

1. Векторне та параметричне рівняння прямої: N 1129, 1130, 1134.
2. Пряма як перетин двох площин: N 983, 986, 988, 991, 995, 1003.
3. Канонічне рівняння прямої: одержати канонічне рівняння прямої, виходячи з векторного рівняння N 1007, рівняння прямої, що проходить через дві дані точки N 1008, одержати канонічне рівняння прямої, виходячи з рівняння прямої, як перетину двох площин N 1018, 1019.
4. Параметричне рівняння прямої: одержати параметричне рівняння прямої, виходячи з канонічного рівняння: N 1009, одержати параметричне рівняння прямої, виходячи з рівняння прямої, як перетину двох площин N 1020, рівняння прямолінійного рівномірного руху матеріальної точки N 1032.
5. Полярне рівняння прямої: N 382, 384.
6. Взаємне розташування прямих в просторі. Критерії (умови) колінеарності, мимобіжності, перетину двох прямих,

використовуючи два алгоритми – координатний та векторний. Відстань між паралельними прямими. Найкоротша відстань між мимобіжними прямими. Побудова спільного перпендикуляру до двох мимобіжних прямих. Знаходження координат точки перетину двох прямих.
Примітка: Звернути увагу на зв'язок векторного рівняння прямої з іншими типами рівнянь, з'ясувати його відмінність від векторного рівняння площини. Підкреслити можливість узагальнення векторних рівнянь на випадок довільних прямих і поверхонь.
Усі приклади вказані за збірником задач [2].
Домашнє завдання: N 383, 984, 987, 1014, 1017, 1031.

Заняття N 11. ***Пряма і площина у просторі***
1. Взаємне розташування прямої та площини у просторі. Критерії (умови) перетину, паралельності та належності прямої до площини.
2. Пряма лежить у площині: N 1039, 1047
3. Змішані задачі на рівняння прямої та площини: N 1051, 1052, 1062, 1064, 1083.
4. Кут між площинами N 974, 977, кут між прямими N 1024, 1025.
5. Проекція прямої на площину: N 1005, 1006.

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [2].
Домашнє завдання: N 980, 1014, 1038, 1040, 1045, 1055, 1058, 1070.

Тема V. Лінії та поверхні другого порядку /4 год./

Заняття N 12. ***Побудова кривих другого порядку. Канонізація кривих другого порядку***

1. Рівняння еліпса: рівняння кривої як геометричне місце точок N 190, 195, рівняння кривої із заданими характеристиками N 444, 446, 457, 459.
2. Рівняння гіперболи: рівняння кривої як геометричне місце точок N 191, рівняння кривої із заданими характеристиками N 515, 518, 529, 539, 557.
3. Рівняння параболи: рівняння кривої як геометричне місце точок: N 192, 197, 589, 591, 601, 604.
4. Розглянути хід променів у дзеркалі параболічної та еліптичної форми. Гіперболічне дзеркал: N 575.
5. Канонізація рівнянь центральних кривих: N 673, 676, 678, 679.
6. Канонізація рівнянь параболічного типу: N 689, 690, 691, 697, 698.
7. Полярні рівняння еліпса, гіперболи, параболи: N 628, 629, 631, 632, 633, 635, 636.

Примітка: Знати означення еліпса, гіперболи, параболи. З'ясувати геометричний зміст рівнянь еліпса, гіперболи і параболи; рівнянь директрис, рівнянь дотичних до даних кривих, фокальних радіусів точок на кривих. Невироджені та вироджені криві.

Вказати і, по можливості, розглянути інші, крім перетворення системи координат, способи приведення кривих другого порядку до канонічного вигляду: використовуючи теорію квадратичних форм, використовуючи інваріанти відносно переносу і повороту осей системи координат.

Усі приклади вказані за збірником задач [2].

Домашнє завдання: N 392, 398, 410, 424, 449, 513, 519, 540, 580, 590, 596, 667, 674, 675, 677, 684, 692. Полярні рівняння кривих другого порядку. Підготуватися до самостійної роботи з теми "Криві другого порядку".

Заняття N 13. ***Поверхні обертання***

1.Еліпсоїд: взаємне розташування поверхні та площини N 1164, 1165, рівняння поверхні N 1168, 1172.

2.Гіперболоїди: взаємне розташування поверхні та площини N 1154, 1160, 1163, рівняння поверхні N 1175, 1176, твірні N 1182, 1184.

3.Параболоїди: взаємне розташування поверхні та площини N 1155, 1166, рівняння поверхні N 1177, 1178, 1179, твірні N 1181, 1183.

Примітка: Встановити, в результаті якого обертання еліпса буде одержано еліпсоїд. Звернути увагу на можливість трансформації тривісного еліпсоїда в двовісний при зміні масштабу вздовж однієї з осей і в сферу при зміні масштабу вздовж двох осей.

Встановити, в результаті яких обертань гіперболи буде одержано однопорожнинний (однополий) та двопорожнинний (двополий) гіперболоїд. Звернути увагу на відмінність між дво- та однопорожнинним гіперболоїдами.

Встановити, в результаті якого руху параболи буде одержано еліптичний параболоїд, гіперболічний параболоїд. Звернути увагу на те, що гіперболічний параболоїд не є поверхнею обертання, за якої умови еліптичний параболоїд є поверхнею обертання.

Розглянути інші варіанти руху однієї кривої другого порядку вздовж іншої. Інші типи поверхонь другого порядку.

Усі приклади вказані за збірником задач [2].

Домашнє завдання: N 1157, 1159, 1162, 1167, 1173, 1175, 1180, 1185.

Тема VI. Лінійні простори /8 год/

Заняття N 14***. Лінійний простір (ЛП)***

1. Означення ЛП та його властивості: N 1, 2, 3, 4 (с. 25, за збірником задач [5]).
2. Лінійний підпростір. Лінійна оболонка: N 1, 2, 3 (с. 29), 10, 11 (с. 32) (за збірником задач [5]), 1294 (за збірником задач [1]).
3. Лінійна залежність і незалежність елементів ЛП: N 2, 3, 4, 5, 6 (с. 34, за збірником задач [5]).
4. Базис і розмірність ЛП: N 639, 641, 1277 (за збірником задач [1]), 4 (с. 42, за збірником задач [5]). Показати, що матриці Паулі і одинична утворюють базис в ЛП ермітових матриць 2x2.
5. Сума і перетин лінійних підпросторів: N 1317 (за збірником задач [1]).

Домашні завдання: N 636, 637, 644, 649, 652, 1278, 1285, 1287, 1288, 1291, 1292, 1301, 1303, 1310 (за збірником задач [1]).

Заняття N 15***. Перетворення базиса і координат. Матриця переходу***

1. Зв'язок між двома різними базисами – матриця переходу. Два способи побудови матриці переходу (прямий за означенням, розв'язуючи відповідні СЛАР, та за допомогою проміжного базису): N 1280.
2. Координати елемента ЛП в довільному базисі. Зв'язок між координатами одного і того ж елементу в різних базисах (з

використанням матриці переходу). Властивості матриці переходу: N 1278 (за збірником задач [1]), 1, 2, 3, 4, 48 (с.55 за збірником задач [5]).

<u>*Примітка:*</u> Приклад побудови матриці переходу наведено в додатку (приклад 3).

Домашні завдання: N 1279,1281, 1283, 1284 (за збірником задач [1]), 46(а,в), 47, 50, 51, 52 (за збірником задач [5]).

Заняття N 16***. Евклідів і унітарний простори. Матриця Грама***

1. Означення евклідового простору. Скалярний добуток і його аксіоматика: N 25.2(1,3,4), 25.5(1), 25.7 (за збірником задач [3]).

2. Матриця Грама і її властивості в евклідовому просторі. Зв'язок між матрицями Грама різних базисів: N 25.15, 25.25(1) (за збірником задач [3]). Приклади:

а) В двовимірному евклідовому просторі скалярний добуток заданий як $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$. Знайти матрицю Грама стандартного базису і базису, заданого векторами $\overrightarrow{f_1} = (1; -1), \overrightarrow{f_2} = (1; 1)$.

б) Вектори евклідового простору $\vec{x} = (1; 0), \vec{y} = (0; -1)$ задані в базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ і відома матриця Грама базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Знайти матрицю Грама Γ_e і скалярний добуток векторів $\vec{x}, \vec{y}$, якщо $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$.

3. Означення унітарного простору. Скалярний добуток і його аксіоматика: N 27.1(2,3), 27.2(1) (за збірником задач [3]).

4. Матриця Грама і її властивості в унітарному просторі: N 27.10(1,3), 27.12(1,7), 27.13(1) (за збірником задач [3]), 10(б) (с.87 за збірником задач [5]).

<u>Примітка:</u> Приклад знаходження скалярного добутку двох довільних елементів простору та побудови матриці Грама наведено в додатку (приклад 4).

Домашнє завдання: N 25.2(2,5), 25.5(2,3), 25.7, 25.8(1,3), 25.11, 25.25(2), 25.26(2,3), 25.32, 25.37, 27.1(1,4), 27.5, 27.10(2,4,5), 27.12(2,3,6,8), 27.13 (за збірником задач [3]), 1354, 1383, 1384 (за збірником задач [1]).

Заняття N 17***. Побудова ортонормованого базису (процес Грама-Шмідта)***

1. Ортогональний і ортонормований базис векторів. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта (під час якої автоматично перевіряється лінійна незалежність векторів): N 1361, 1362, 1363 (за збірником задач [1]), 27.28(1,3) (за збірником задач [3]).

2. Доповнення системи векторів до ортогонального (ортонормованого) базису: N 1357, 1358 (за збірником задач [1]).

3. Ортогоналізація системи векторів, координати яких задані в нестандартному базисі (матриця Грама не є одиничною): N 26.44(1,2) (за збірником задач [3]).

<u>Примітка:</u> Звернути увагу на відмінність між формулами ортогоналізації і ортогоналізації з покроковим нормуванням.

Приклад процесу ортогоналізації Грама-Шмідта наведено в додатку (приклад 6).

Домашнє завдання: N 1358, 1360 (за збірником задач [1]), 26.42, 26.44(3,4), 27.28(2,4,5) (за збірником задач [3]).

Тема VII. Лінійні відображення та оператори /4 год/

Заняття N 18***. Лінійні оператори в евклідовому та унітарному просторах***

1. Означення лінійного оператора. Приклади лінійних операторів: нуль-оператор, тотожний або одиничний оператор, оператор подібності з коефіцієнтом подібності μ, оператор диференціювання, оператор повороту, оператор проектування векторів.
2. Побудова матриці лінійного оператора. Перевірка оператора (відображення, перетворення) на ознаки лінійності. Зв'язок між матрицями одного і того ж оператора в різних базисах: N 6, 8, 15 (с. 111); 2 (с. 113); 1, 9, 13, 14, 16 (с. 120).
3. Спряжений, самоспряжений (симетричний) та ортогональний оператори в евклідовому просторі, їх властивості: N 1, 2 (с.137); 38, 44, 48 (с. 143).
4. Спряжений, самоспряжений (ермітів) та унітарний оператори в унітарному просторі, їх властивості: N 49, 53, 54, 58, 65 (с. 154).

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [5].
Приклад знаходження матриці оператора в різних базисах наведено в додатку (приклад 5).

Домашнє завдання: N 2, 3, 4, 10, 11, 15 (с. 120); 43 (с. 144); 50, 59, 67 (с.154).

Заняття N 19***. Обчислення власних чисел і векторів***

1. Постановка задачі та алгоритм пошуку власних чисел і власних векторів. Побудова інваріантних підпросторів. Власні числа і власні вектори операторів в евклідовому

просторі: N 1465, 1467, 1470, 1472 1504 (за збірником задач [1]).
2. Власні числа і вектори операторів в унітарному просторі (звернути особливу увагу на ермітові оператори): знайти власні числа і вектори матриць Паулі та матриці поворотів Лоренца.
3. Властивості (відповідні теореми) власних чисел і векторів симетричних матриць. Діагоналізація симетричної матриці: N 723, 725, 727 (за збірником задач [4]). Діагоналізація несиметричної матриці: N 1479 (за збірником задач [1]).
Примітка: Відмітити значення кратних власних чисел.

Приклад знаходження власних значень та ортонормованої системи власних векторів матриці наведено в додатку (приклад 6).

Домашнє завдання: N 1466, 1468, 1471, 1473, 1480 (за збірником задач [1]), 711, 713, 714, 724, 726, 728 (за збірником задач [4]). Знайти власні числа і вектори матриць Дірака.

Тема VIII. Білінійні та квадратичні форми /2 год/

Заняття N 20***. Канонізація симетричних білінійних форм***
1. Матриця білінійної форми та її ранг: а) записати матрицю білінійної форми:
$f(x,y)=5x_1y_1 + 6x_2y_1 + 3x_3y_1 - 2\, x_1y_2 + 4x_3y_2 - 3x_1y_3 + 2x_2y_3 + x_3y_3$;
б) представити білінійну форму f(x,y) у вигляді суми симетричної $f_+(x,y)$ і антисиметричної $f_-(x,y)$ форм.
2. Перетворення матриці білінійної форми при заміні базису: знайти матрицю А в новому базисі:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Канонічний та нормальний вигляд квадратичної форми. Два методи канонізації: метод Лагранжа (виділення повних квадратів) та метод ортогональних перетворень. Приведення квадратичної форми до нормального вигляду: N 1175, 1177, 1179, 1182, 1184, 1187.
4. Знаковизначеність квадратичної форми. Критерій Сільвестра: N 1212, 1214, 1216.
5. Алгоритм пошуку спільного невиродженого перетворення, що приводить пару квадратичних форм до діагонального вигляду (одна з форм обов'язково додатно визначена): N 1225, 1229.

Примітка: Усі приклади вказані за збірником задач [1].

Приклад приведення пари квадратичних форм одним невиродженим перетворенням координат до канонічного вигляду наведено в додатку (приклад 7).

Домашнє завдання: N 1176, 1178, 1181, 1183, 1185, 1188, 1213, 1215, 1846, 1847, 1224, 1226

Додаток

<u>*Приклад 1.*</u> Знайти визначник наступної матриці порядку *n*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix}$$

Розв’язок:

Спосіб 1: Зведення матриці до трикутної.

Використовуючи властивості визначників щодо елементарних перетворень матриці потрібно звести матрицю до верхньої трикутної форми. Але перш ніж починати приведення матриці до трикутної доцільно провести деякі перетворення. Спочатку розділимо перший рядок на x_1, другий на x_2 і так до останнього, який розділимо на x_n

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} + y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_2 & \frac{1}{x_2} + y_2 & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & \frac{1}{x_n} + y_n \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Тепер зробимо те ж саме зі стовпчиками. Розділимо перший стовпчик на y_1, другий на y_2, і так до y_n

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{x_1y_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{x_2y_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + \frac{1}{x_ny_n} \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Тепер зведемо отриману матрицю до трикутної. Для цього спочатку віднімемо перший рядок від кожного наступного. Отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{x_1y_1} & 1 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{1}{x_1y_1} & \dfrac{1}{x_2y_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{1}{x_1y_1} & 0 & \cdots & \dfrac{1}{x_ny_n} \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Далі до першого стовпчика додамо другий домножений на $\frac{x_2y_2}{x_1y_1}$. Отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{x_1y_1}+\dfrac{x_2y_2}{x_1y_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2y_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{1}{x_1y_1} & 0 & \cdots & \dfrac{1}{x_ny_n} \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Аналогічним чином, до першого стовпчика додамо третій домножений на $\frac{x_3y_3}{x_1y_1}$, і так далі до останнього стовпчика, який теж додамо до першого домноженим на $\frac{x_ny_n}{x_1y_1}$. В результаті отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{x_1y_1}+\dfrac{x_2y_2}{x_1y_1}+\dfrac{x_3y_3}{x_1y_1}+\cdots+\dfrac{x_ny_n}{x_1y_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2y_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{x_ny_n} \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Отримана матриця є трикутною, а отже її визначник є добутком діагональних елементів

$$\det A = \left(1 + \frac{1}{x_1y_1} + \frac{x_2y_2}{x_1y_1} + \frac{x_3y_3}{x_1y_1} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{x_ny_n}{x_1y_1}\right)\frac{1}{x_2y_2}\,\frac{1}{x_3y_3}\dots\frac{1}{x_ny_n}\prod_{i=1}^{n} x_iy_i =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x_1y_1} + \frac{x_2y_2}{x_1y_1} + \frac{x_3y_3}{x_1y_1} + \cdots + \frac{x_ny_n}{x_1y_1}\right)x_1y_1$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Спосіб 2: Розклад на суму визначників.

Спосіб базується на наступній властивості визначника: якщо рядок (чи стовпчик) матриці можна представити у вигляді суми двох рядків (стовпчиків), то визначник такої матриці можна представити у вигляді суми:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Отже, розкладемо шуканий визначник на суму двох визначників за першим рядком наступним чином:

$$\det A = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}}_{\det A_1} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}}_{\det B_1}.$$

Розглянемо спочатку другий з отриманих визначників. В ньому віднімемо від другого рядка перший помножений на x_2/x_1. Отримаємо

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Аналогічним чином, віднімемо від третього рядка перший помножений на x_3/x_1 і так далі до останнього рядка, від якого потрібно відняти перший помножений на x_n/x_1. В результаті отримаємо трикутну матрицю, визначник від якої обчислюється як добуток діагональних елементів

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1y_1.$$

Тепер повернемось до першого визначника в сумі ($\det A_1$). Його розкладемо на суму двох визначників за другим рядком

$$\det A_1 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}}_{\det A_2} +$$

$$+\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}}_{\det B_2}$$

Аналогічно до попереднього визначника, можна показати, що $\det B_2 = x_2y_2$. Таким чином, після n розкладів початковий визначник перетвориться на наступну суму:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

<u>*Приклад 2.*</u> За допомогою НФСР (або ФСР) відповідної їм однорідної системи та частинного розв’язку неоднорідної системи знайти загальний розв’язок системи лінійних неоднорідних рівнянь (N 689 [1]):

$$\begin{aligned} &2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ &3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ &9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{aligned} \qquad (1).$$

Розв’язок:

1. Дослідження неоднорідної СЛАР на сумісність.

Основна матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розширена матриця системи

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

За критерієм Кронекера-Капеллі система є сумісною, якщо ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці системи.

Знайдемо ранг основної матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rang A=2.

Знайдемо ранг розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

rang A =2.*

За критерієм Кронекера-Капеллі система є сумісною (*rang A= rang A* =2*) і має два лінійно незалежні рівняння.

Оберемо перше та друге рівняння системи *(1)*, які є лінійно незалежними.

$2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6$

$3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4$ *(2).*

2. Для визначення базисних та параметричних змінних, оберемо базисний мінор (в даному випадку мінор 2-го порядку, що не дорівнює 0).

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Змінні x_1 та x_2, що відповідають базисному мінору, є базисними. Інші – x_3 та x_4, – парамеричними.

В обраних нами рівняннях переносимо члени з параметричними змінними в правий бік і записуємо систему у вигляді

$2x_1+7x_2=-3x_3-x_4+6$

$3x_1+5x_2=-2x_3-2x_4+4 \qquad (3).$

Зауважимо, що кількість розв'язків в НФСР та ФСР буде дорівнювати $n-r$, де n – кількість змінних, а r – ранг матриці системи (а, отже, буде дорівнювати кількості параметричних змінних). В даному прикладі $n-r=4-2=2$.

Для знаходження НФСР та ФСР вільні члени рівнянь системи *(3)* змінимо на 0. Таким чином, далі будемо шукати **НФСР та ФСР відповідної однорідної системи**

$2x_1+7x_2=-3x_3-x_4$

$3x_1+5x_2=-2x_3-2x_4 \qquad (4).$

3. Побудова нормальної фундаментальної системи розв'язків СЛАР.

В загальному випадку алгоритм побудови НФСР є наступним. Надамо параметричним змінним значення 1, 0, 0, ..., 0 і обчислимо базисні змінні, розв'язавши отриману систему лінійних рівнянь. Так буде отримано перший розв'язок НФСР. Якщо надати параметричним змінним значення 0, 1, 0, 0, ..., 0 і обчислити при цьому базисні змінні, то отримаємо другий розв'язок. І так далі.

В даному прикладі для першого розв'язку $x_3=1$ та $x_4=0$.

Система *(4)* матиме вигляд

$2x_1+7x_2=-3$

$3x_1+5x_2=-2,$ звідки $x_1=\frac{1}{11}$, $x_2=-\frac{5}{11}$.

$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Для другого розв'язку $x_3 = 0$ та $x_4 = 1$. Система *(4)* матиме вигляд

$2x_1+7x_2 = -1$

$3x_1+5x_2 = -2$, звідки $x_1 = -\frac{9}{11}$, $x_2 = \frac{1}{11}$.

$|x\rangle_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

НФСР можна записати як $c_1\,|x\rangle_1 + c_2\,|x\rangle_2$, *де* c_1 та c_2 – довільні числа.

4. Побудова фундаментальної системи розв'язків СЛАР. Параметричним змінним надаємо будь-яких значень, які забезпечують лінійну незалежність стовбчиків, що утворюють ФСР.

Для першого розв'язку надамо параметричним змінним наступні значення: $x_3 = 1$ та $x_4 = 1$. Система *(4)* матиме вигляд

$2x_1+7x_2 = -4$

$3x_1+5x_2 = -4$, звідки $x_1 = -\frac{8}{11}$, $x_2 = -\frac{4}{11}$.

$|x\rangle_{1ф} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Для другого розв'язку $x_3 = 1$ та $x_4 = -1$.

$2x_1+7x_2 = -2$

$3x_1+5x_2=0$, звідки $x_1 = \frac{10}{11}$, $x_2 = -\frac{6}{11}$.

$|x\rangle_{2ф}=\begin{pmatrix} \frac{10}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ФСР можна записати як $c_1\,|x\rangle_{1ф}+c_2|x\rangle_{2ф}$, *де* c_1 та c_2– довільні числа .

5. Знаходження частинного розв'язку неоднорідної СЛАР.

Надаємо параметричним змінним будь-яких значень, наприклад, $x_3 = 0$, та $x_4 = 0$, та підставляємо **в неоднорідну СЛАР** *(3).*

$2x_1+7x_2 = 6$

$3x_1+5x_2=4$, звідки $x_1 = -\frac{2}{11}$, $x_2 = \frac{10}{11}$.

Частинний розв'язок $|x\rangle_0=\begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Записати загальний розв'язок СЛАР можна як суму НФСР та будь-якого частинного розв'язку СЛАР

$$|x\rangle=c_1\begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

або як суму ФСР та будь-якого частинного розв'язку СЛАР

$$|x\rangle = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{8}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом, та знайти зв'язок координат одного й того ж вектора в цих двох базисах (N 1280 [1])

$\vec{e}_1 = (1, 2, 1),\ \vec{e}_2 = (2, 3, 3),\ \vec{e}_3 = (3, 7, 1);$

$\vec{e}'_1 = (3, 1, 4),\ \vec{e}'_2 = (5, 2, 1),\ \vec{e}'_3 = (1, 1, -6).$

Додаткове завдання. Знайти координати вектора $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3$ в базисі $\langle e'|$.

Розв'язок:

1. Перевіримо, чи є кожна з систем векторів базисом (чи є вектори лінійно незалежними). Для цього переконаємось, що відповідні трійки векторів не є компланарними.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Обидві системи є базисом.

2. Базиси $\langle e|$ та $\langle e'|$ зв'язані співвідношенням $\langle e'| = \langle e|\, T_{\langle e| \to \langle e'|}$

Знайдемо матрицю переходу від базису $\langle e|$ до базису $\langle e'|$ $T_{\langle e| \to \langle e'|}$ (через проміжний базис).

За умовою координати векторів обох систем, що є базисами $\langle e|$ та $\langle e'|$, задані в деякому третьому базисі $\langle i|$. Запишемо зв'язок між базисами $\langle e|$ та $\langle i|$, а також $\langle e'|$ та $\langle i|$:

$\langle e| = \langle i|\, T_{i \to e};$ $\qquad\qquad \langle e'| = \langle i|\, T_{i \to e'}.$

Матриця $T_{i\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, а $T_{i\to e'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Тоді матрицю переходу від базису $\langle e|$ до базису $\langle e'|$ $T_{\langle e| \to \langle e'|}$ можна записати як

$T_{e\to e'} = T_{e\to i}\, T_{i\to e'}$, де $T_{e\to i} = T^{-1}{}_{i\to e}$.

Знаючи $T_{i\to e}$ знайдемо обернену матрицю $T^{-1}{}_{i\to e}$ методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -8 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right);$$

$$T^{-1}{}_{i\to e} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\langle e|$ зв'язані з координатами цього ж вектора в базисі $\langle e'|$ співвідношенням

$|x_e\rangle = T_{e\to e'}|x_{e'}\rangle$.

Нашим завданням є знайти координати вектора $\vec{x}$, що заданий в базисі ‹e| ($\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3$), в базисі ‹$e'$|. Для цього використаємо співвідношення

$|x_{e'}\rangle = T_{e'\to e}|x_e\rangle$, де

$| x_e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\quad T_{e'\to e} = T^{-1}{}_{e\to e'}$.

Знайдемо $T^{-1}{}_{e\to e'}$.

$$T^{-1}{}_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 45{,}25 \\ -9 & -13 & -31{,}5 \\ 7 & 10 & 24{,}75 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$|x_{e'}\rangle = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 45{,}25 \\ -9 & -13 & -31{,}5 \\ 7 & 10 & 24{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84{,}75 \\ 59{,}5 \\ -47{,}25 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vec{x}$ в базисі ‹e′| можна записати наступним чином:

$\vec{x} = -84{,}75\,\vec{e}'_1 + 59{,}5\,\vec{e}'_2 - 47{,}25\,\vec{e}'_3$

Приклад 4. В просторі P_2 многочленів степені не більше ніж 2, скалярний добуток елементів $f(x)$ і $g(x)$ вводиться по формулі: $(f \cdot g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.

а) Знайти скалярний добуток многочленів

$f(x) = 1 + 2x + x^2$, $g(x) = 1 - x$, їх норми та кут між ними.

б) Записати вираз скалярного добутку двох довільних елементів простору P_2 через їх координати в базисі $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$. Записати матрицю Грама цього базису.

Розв’язок:

а) Знайдемо значення $f(x)$ та $g(x)$ в точках $x=-1$, $x=0$, $x=1$:

$f(-1)=0$; $g(-1)=2$; $f(0)=1$; $g(0)=1$; $f(1)=4$; $g(1)=0$.

Скалярні добутки $(f, g) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1$;

$(f,f) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 17,;$
$(g,g) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5.$
Норми $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{17};\ \|g\| = \sqrt{(g,g)} = \sqrt{5}.$

$$\cos\alpha = \frac{(f,g)}{\|f\|\,\|g\|} = \frac{1}{\sqrt{85}}\ , \qquad \alpha = arc\cos\frac{1}{\sqrt{85}}.$$

б) Запишемо довільні елементи простору P_2 в базисі $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 = \sum_{i=0}^{2} c_i p_i,$$

$$g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 = d_0 p_0 + d_1 p_1 + d_2 p_2 = \sum_{j=0}^{2} d_j p_j\ .$$

Тоді їх скалярний добуток має вигляд

$$(f,g) = \sum_{i,j=0}^{2} c_i d_j (p_i, p_j) = \sum_{i,j=0}^{2} c_i d_j a_{ij}\ .$$

Знаходимо a_{ij}:
$a_{00} = (p_0, p_0) = p_0(-1)p_0(-1) + p_0(0)p_0(0) + p_0(1)p_0(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3,$
$a_{01} = a_{10} = (p_0, p_1) = p_0(-1)p_1(-1) + p_0(0)p_1(0) + p_0(1)p_1(1) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0,$
$a_{11} = (p_1, p_1) = p_1(-1)p_1(-1) + p_1(0)p_1(0) + p_1(1)p_1(1) = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2,$
$a_{02} = a_{20} = (p_0, p_2) = p_0(-1)p_2(-1) + p_0(0)p_2(0) + p_0(1)p_2(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2,$
$a_{12} = a_{21} = (p_1, p_2) = p_1(-1)p_2(-1) + p_1(0)p_2(0) + p_1(1)p_2(1) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0,$
$a_{22} = (p_2, p_2) = p_2(-1)p_2(-1) + p_2(0)p_2(0) + p_2(1)p_2(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2.$

$(f,g) = 3c_0 d_0 + 2c_1 d_1 + 2c_0 d_2 + 2c_2 d_0 + 2\,c_2 d_2$.
Запишемо матрицю Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (p_0,p_0) & (p_0,p_1) & (p_0,p_2) \\ (p_1,p_0) & (p_1,p_1) & (p_1,p_2) \\ (p_2,p_0) & (p_2,p_1) & (p_2,p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>*Приклад 5.*</u> Лінійний оператор $\hat{A}$, що діє в унітарному просторі E_2, має в ортонормованому базисі e_1, e_2 матрицю $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$. Знайти матрицю спряженого оператора $\hat{A}^*$ в базисі $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$. Чи є оператор $\hat{A}$ ермітовим? (N 49 (с. 154) [5]).

Розв'язок:
1. Шукаємо матрицю спряженого оператора $\hat{A}^*$ в ортонормованому базисі e_1, e_2 з рівності $A_e^* = \bar{A}_e^T$:

$$A_e^* = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A_e \neq A_e^*$, оператор $\hat{A}$ не є ермітовим.

2. При переході до базису f_1, f_2 матриця оператора $\hat{A}^*$ перетворюється за формулою $A_f^* = T_{e\to f}^{-1} A_e^* T_{e\to f}$.
Запишемо матрицю переходу від базису e_1, e_2 до базису f_1, f_2

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю

$$T_{e\to f}^{-1} == \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A_f^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти власні значення та ортонормовану систему власних векторів матриці порядку n:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

1. Шукаємо визначник $\det(A - \lambda I)$ наступним чином. Додаємо всі рядки до першого. Отримаємо перший рядок з $(n + 1 - \lambda)$, а всі інші без зміни. Виносимо $(n + 1 - \lambda)$ з визначника

$$\det(A - \lambda I) = (n + 1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Далі, віднімаємо перший рядок (з одиниць) від кожного рядка починаючи з другого. Отримаємо

$$\det(A - \lambda I) = (n + 1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (n + 1 - \lambda)(1 - \lambda)^{n-1}.$$

Отже шукані власні значення $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = n + 1$.

2. Знайдемо власні вектори. При $\lambda = n + 1$ отримаємо наступні n рівнянь на компоненти власного вектора:

$$-(n-1)x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_j = 0, \qquad i = 1, \dots n.$$

Очевидно, нормований розв'язок $x_i = 1/\sqrt{n}$.

Власне значення $\lambda = 1$ є кратним з крантістю $n - 1$. Йому повинно відповідати $n - 1$ лінійно незалежних власних векторів. Для цього власного значення система складається з n однакових рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 0.$$

Маємо систему з 1 базисною та $(n - 1)$ параметричною змінною. Нормальна фундаментальна система розв'язків може бути побудована з наступних векторів-стовпчиків.

$$h_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)^T, \qquad h_2 = (0, 1, -1, \dots, 0)^T, \quad \dots$$

$$h_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, -1)^T.$$

Вони є лінійно незалежними, але оскільки відповідають одному і тому ж власному значенню, то не є ортогональними. Отже, далі ортонормуємо цей набір за процедурою Грама-Шмідта. Ця процедура пов'язує кожен наступний вектор з попередніми співвідношенням

$$e_k = h_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(h_k, e_j)}{(e_j, e_j)} e_j$$

Отримаємо наступний набір власних векторів:

$$e_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} (1, -1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, \dots, 0 \right)^T,$$

$$e_k = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k}, -1, 0, \dots, 0 \right)^T,$$

$$e_{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, -1\right)^T.$$

Доповнимо цей набір нормованим власним вектором, що відповідає $\lambda = n + 1$ і є ортогональним до всіх попередніх

$$e_n = \sqrt{\frac{1}{n}}(1,1, \dots ,1)^T.$$

<u>*Приклад 7.*</u> Дано дві квадратичні форми:

$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2, \qquad g(x) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2.$

Привести цю пару форм одним невиродженим перетворенням координат до канонічного вигляду.

Розв'язок:

1. Запишемо матриці обох квадратичних форм.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця F додатно визначена, оскільки всі її кутові мінори додатні: $\delta_1 = 1,\ \ \delta_2 = 2.$

2. Приведемо невиродженим лінійним перетворенням $|x\rangle = T_{e\to e'}|x'\rangle$ квадратичну форму $f(x)$ до канонічного вигляду $f'(x') = x_1'^2 + x_2'^2$. Для цього скористаємось методом Лагранжа.

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 =$$

$$= \left| \begin{matrix} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \sqrt{2}x_2 \end{matrix} \right| = x_1'^2 + x_2'^2.$$

Це перетворення можна записати в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, шукане перетворення $|x\rangle = T_{e\to e'}|x'\rangle$, яке приводить квадратичну форму $f(x)$ до суми квадратів $f'(x') = x_1'^2 + x_2'^2$, визначається матрицею

$$T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо матрицю $G' = T_{e\to e'}^T G T_{e\to e'}$ квадратичної форми $g'(x')$:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \dfrac{4}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{2}} & -3 \end{pmatrix},$$

і відповідно $g'(x') = 4x_1'^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} x_1' x_2' - 3x_2'^2$.

4. Ортогональним перетворенням $|x'\rangle = T_{e'\to e''}|x''\rangle$ приведемо квадратичну форму $g'(x')$ до діагонального вигляду. Характеристичний многочлен матриці G'

$$|G' - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & \dfrac{4}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{2}} & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) - 8$$

має корені $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -4$.

Знайдемо ортогональні нормовані власні вектори матриці G'.

Для $\lambda = 5$ матриця однорідної системи рівнянь відносно координат власних векторів має вигляд

$$G' - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{4}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{2}} & -8 \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 1 і фундаментальна система розв'язків системи складається з одного розв'язку (одразу виберем нормований розв'язок)

$$f_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, для $\lambda = -4$ отримаємо

$$G' - \lambda I = \begin{pmatrix} 8 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

і фундаментальна система розв'язків складається з одного розв'язку

$$f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Оскільки всі власні значення матриці G' різні, то знайдені вектори f_1 і f_2 є ортогональними. Вони є стовпчиками шуканої матриці $T_{e\prime \to e\prime\prime}$ ортогонального перетворення. Таким чином, ортогональне перетворення $|x'\rangle = T_{e\prime \to e\prime\prime}|x''\rangle$, де

$$T_{e\prime \to e\prime\prime} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix},$$

приводить квадратичну форму $g'(x')$ до канонічного вигляду

$$g'(x') = 4x_1'^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} x_1' x_2' - 3x_2'^2 = \frac{4}{9}\left(2\sqrt{2}x_1'' - x_2''\right)^2 +$$

$$+\frac{8}{9\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}x_1'' - x_2''\right)\left(x_1'' + 2\sqrt{2}x_2''\right) - \frac{3}{9}\left(x_1'' + 2\sqrt{2}x_2''\right)^2 =$$

$$= 5x_1''^2 - 4x_2''^2.$$

5. При ортогональному перетворенні $|x'\rangle = T_{e'\to e''}|x''\rangle$ квадратична форма $f'(x') = x_1'^2 + x_2'^2$ знову переходить в суму квадратів $f''(x'') = x_1''^2 + x_2''^2$. Таким чином невироджене лінійне перетворення

$$|x\rangle = T_{e\to e'}T_{e'\to e''}|x''\rangle = T_{e\to e''}|x''\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}|x''\rangle$$

або

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1'' - x_2'', \quad x_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}x_1'' + \frac{2}{3}x_2''$$

приводить обидві квадратичні форми $f(x)$ і $g(x)$ до канонічного вигляду.

Використані збірники задач

1. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.:Наука, 1988.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.:Наука, 1972.
3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.:Физматлит, 2004.
4. Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О., Зражевська Г.М., Ющенко О.А. Збірник задач з вищої математики. – К.:Вид-во Київського Університету, 1967.
5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.:Физматлит, 2002.