

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Горкавенко Володимир Миколайович

Стабільність електрослабкого вакууму

Навчальний посібник для студентів фізичного факультету

Київ – 2024

Навчальний посібник для студентів фізичного факультету /
Стабільність електрослабкого вакууму / В.М. Горкавенко — Київ,
2024. — 53 с.

Рецензенти: М.Ю. Овчинніков, доктор філософії (Ph.D.),
науковий співробітник Європейського центру
ядерних досліджень (CERN)
О.М. Горбаченко, канд. фіз.-мат. наук, зав. НДІ
"Ядерної спектроскопії", асистент кафедри фізики
ядра та високих енергій

Затверджено
вченою радою
фізичного факультету
21 жовтня 2024 року

Стабільність електрослабкого
вакууму / В.М. Горкавенко

Навчальний посібник присвячено дослідженню стабільності електро-
слабкого вакууму в Стандартній Моделі та її розширеннях. Детально
досліджено ефективний потенціал поля Хіггса, його залежність від
енергетичного масштабу та умови стабільності електрослабкого ва-
кууму. Розглянуто вплив додаткових полів і нових взаємодій на ста-
більність вакууму, а також можливий вплив взаємодії поля Хіггса
з кривиною простору-часу. Особливу увагу приділено використанню
методів ренормгрупи для дослідження поведінки параметрів теорії на
високих енергетичних масштабах.

Навчальний посібник призначений для студентів фізичного факульте-
ту, які вивчають квантову теорію поля та Стандартну Модель фізики
елементарних частинок.

ЗМІСТ

1	Вступ	4
2	Спонтанне порушення симетрії	5
2.1	Спонтанне порушення дискретної симетрії . . .	7
2.2	Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $U(1)$	12
2.3	Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $SU(2)$	17
2.4	Теорема Голдстоуна	19
3	Генерація мас калібрувальних полів та полів матерії . .	23
3.1	Механізм Хіггса генерації маси калібрувальних полів	23
3.2	Генерація мас калібрувальних полів в СМ	27
3.3	Маса полів матерії в СМ	32
4	Ефективний потенціал поля Хіггса	34
4.1	Узагальнення за наявності додаткових полів . .	38
4.2	Ефективний потенціал поля Хіггса в СМ	39
4.3	Покращений запис ефективного потенціалу поля Хіггса методом теорії ренормгрупи	40
5	Стабільність електрослабкого вакууму поля Хіггса в СМ	43
6	Вплив нової фізики на стабільність електрослабкого вакууму поля Хіггса	45
7	Вплив взаємодії поля Хіггса з кривиною простору-часу	48
	ЛІТЕРАТУРА	49

1 Вступ

Стандартна модель фізики елементарних частинок (СМ) була створена наприкінці 60-х років XX століття Стівеном Вайнбергом, Абдусом Саламою та Шелдоном Глешоу. СМ найкращим чином описує електромагнітні, слабкі та сильні взаємодії елементарних частинок та вдало витримує перевірку великою кількістю високоточних експериментів за участю елементарних частинок до енергетичних масштабів ~ 100 GeV (а для окремих процесів і до декількох TeV), а також добре узгоджується з даними космологічних спостережень.

З іншого боку, ряд фактів (наявність у нейтрино маси, проблема баріонної асиметрії, наявність у Всесвіті темної матерії) свідчить про те, що СМ не є повною фізичною моделлю та потребує модифікації.

СМ, як теоретична модель, базується на принципах локальної калібрувальної інваріантності та механізмі Хіггса генерації маси векторних бозонів та частинок матерії. Як відомо, маси частинок СМ генеруються ненульовим вакуумним середнім поля Хіггса, яке набуває поле Хіггса в точці мінімуму свого потенціалу. Виявляється, що врахування радіаційних поправок призводить до модифікації потенціалу поля Хіггса при великих значеннях поля Хіггса.

В даному посібнику коротко нагадуються принципи спонтанного порушення симетрії та механізм Хіггса генерації маси частинок СМ. Базуючись на принципі спонтанного порушення симетрії розглядається питання, за яких умов може утворитися додатковий мінімум потенціала при великих значеннях поля Хіггса, та чи можливий тунельний перехід поля Хіггса в положення з новим значенням вакуумного середнього. Якщо перехід в стан іншого мінімуму потенціалу Хіггса є можливим, це вказуватиме на нестабільність електрослабкого вакууму.

Даний навчально-методичний посібник написаний з метою допомогти студентам опанувати досить складний матеріал відповідної теми з курсу "Розширення Стандартної моделі", що читається автором для студентів фізичного факультету освітньої програми "Квантова теорія поля".

2 Спонтанне порушення симетрії

Вступ

Принцип локальної калібрувальної інваріантності, що лежить в основі побудови Стандартної Моделі, визначає спосіб введення калібрувальних полів, які забезпечують взаємодію між частинками. Водночас безпосереднє застосування цього принципу до опису слабкої взаємодії породжує проблему. Зокрема, переносники слабкої взаємодії $W^\pm$ та Z є масивними частинками. Однак масовий доданок калібрувального поля має вигляд

$$-\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

і явно порушує локальну калібрувальну інваріантність. Отже, необхідно знайти механізм, який дозволяє калібрувальним полям набути маси, не руйнуючи калібрувальної симетрії теорії.

Такий механізм пов'язаний із явищем спонтанного порушення симетрії. Для його реалізації до теорії вводять скалярне поле (або декілька скалярних полів), основний стан якого відповідає ненульовому сталому значенню поля. У результаті симетрія лагранжіана зберігається, але основний стан системи виявляється менш симетричним, ніж початкова теорія.

Саме це дозволяє узгодити локальну калібрувальну інваріантність із наявністю масивних частинок. Взаємодія скалярного поля з калібрувальними полями після спонтанного порушення симетрії приводить до появи масових членів для калібрувальних бозонів. Водночас взаємодія скалярного поля з ферміонними полями може забезпечити виникнення мас ферміонів. Таким чином, маси калібрувальних бозонів і ферміонів виникають як наслідок взаємодії з одним і тим самим скалярним полем, тоді як калібрувальна симетрія залишається фундаментальною симетрією лагранжіана.

Механізм отримання маси калібрувальними полями завдяки їх взаємодії зі скалярним полем отримав назву *механізму Хіггса*. Він був запропонований у 1964 році Пітером Хіггсом [1,2] та, незалежно, Робертом Браутом і Франсуа Енглером [3], а також Джеральдом Гуральником, Карлом Гагеном та Томом Кібблом [4]. Цей механізм забезпечує появу маси калібрувальних полів, не порушуючи локальної калібрувальної інваріантності.

Важливо також відзначити, що у 1971 році Герард т'Хофт показав, що калібрувальні теорії зі спонтанним порушенням симетрії є перенормовними, див. §11.2, [5]. Це стало принциповим результатом для побудови перенормовної теорії електрослабкої взаємодії.

Системи з можливим спонтанним порушенням симетрії не є якимось екзотичними, з ними можна зустрітися і в повсякденному житті. Наприклад, уявімо собі скляну пляшку з опуклим денцем, що стоїть на столі. Вона має симетрію відносно обертання навколо вісі, що проходить вертикально через центр пляшки. Тепер кинемо в цю пляшку маленьку кульку — вона опиниться в довільній точці на дні круглого жолобка. Всі точки на дні жолобка будуть для неї рівномірними. Але якщо розглядати пляшку з кулькою на дні, то дана система вже не матиме симетрії відносно обертання — в ній буде виділена точка. Точка ж симетрію відносно обертання знаходитиметься на вершині опуклого денця, але кулька в цій точці матиме більшу потенційну енергію, аніж в точці з порушеною симетрією в жолобку. Якщо ми обережно помістимо кульку на вершину жолобка, то кулька опиниться в стані нестійкої рівноваги і намагатиметься перейти в стан з найменшою енергією, але порушеною симетрією на дні жолобка.

Іншим прикладом слугує теорія феромагнетизму поблизу температури Кюрі T_C . Суть явища полягає у тому, що при температурі $T > T_C$ магнітні диполі у речовині орієнтовані довільним чином і намагніченість у речовині відсутня, при $T < T_C$ магнітні диполі орієнтуються вздовж одного довільного напрямку і речовина отримує намагніченість. Пояснення явища було запропоновано Віталієм Гінзбургом та Левом Ландау у 1950 році, див. §5.3, [5]. Вони припустили, що поблизу точки Кюрі намагніченість $\vec{M}$ є малою, і вільну енергію можна записати (розкласти в ряд) нехтуючи високими ступенями вектора $\vec{M}$. Тоді

$$u(\vec{M}) = (\partial_i \vec{M})^2 + V(\vec{M}), \quad V(\vec{M}) = \alpha_1(T) (\vec{M} \cdot \vec{M}) + \alpha_2(\vec{M} \cdot \vec{M})^2, \quad (2.1)$$

де $\alpha_1(T) = \alpha(T - T_C)$, $\alpha > 0$, $\alpha_2 > 2$. Основний стан реалізується для мінімуму вільної енергії, тобто коли доданок $(\partial_i \vec{M})^2$ є малим і величина $V(\vec{M})$ досягає свого мінімуму, що знаходиться з умови $\frac{\partial V}{\partial M_i} = 0$, тобто

$$\vec{M}(\alpha_1 + 2\alpha_2(\vec{M} \cdot \vec{M})) = 0. \quad (2.2)$$

При $T > T_C$, $\alpha_1 > 0$ реалізується стан $\vec{M} = 0$. При $T < T_C$, $\alpha_1 < 0$

основний стан системи реалізується при ненульовій намагніченості $|\vec{M}| = \sqrt{-\alpha_1/2\alpha_2}$. Однак напрямок вектора $\vec{M}$ визначається довільним чином. Своєю появою вектор намагніченості порушує симетрію системи з початкової симетрії сфери (симетрія групи $SO(3)$) до симетрії відносно поворотів навколо вісі, що проходить вздовж вектора намагніченості (симетрія групи $SO(2)$).

У даному розділі ми розглянемо на конкретних прикладах, яким чином відбувається спонтанне порушення симетрії в польових моделях.

2.1 Спонтанне порушення дискретної симетрії

Розглянемо нейтральне скалярне поле з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi), \quad (2.3)$$

де потенціал заданий виразом

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \quad (2.4)$$

Такий вибір потенціалу обумовлений, по-перше, тим, що в нашому $(3 + 1)$ -вимірному просторі теорія скалярного поля з потенціалом, який містить доданки $\sim \varphi^n$ (де $n > 4$), є неперенормовною і, відповідно, нефізичною; по-друге, потенціал, що містить польові доданки в парних ступенях легко можна узагальнити для комплексних полів, інваріантних відносно перетворень певної групи симетрії (наприклад, за допомогою заміни $\varphi^2 \rightarrow \varphi^+\varphi$).

Потенціал (2.4), очевидно, має симетрію відносно дискретних перетворень

$$\varphi \rightarrow -\varphi. \quad (2.5)$$

Залежно від знаків параметрів λ, μ , поведінка потенціалу представлена на Рис. 1.

Із явного виду лагранжіана (2.3) випливає рівняння руху для скалярного нейтрального поля

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{1}{\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\varphi = 0, \quad (2.6)$$

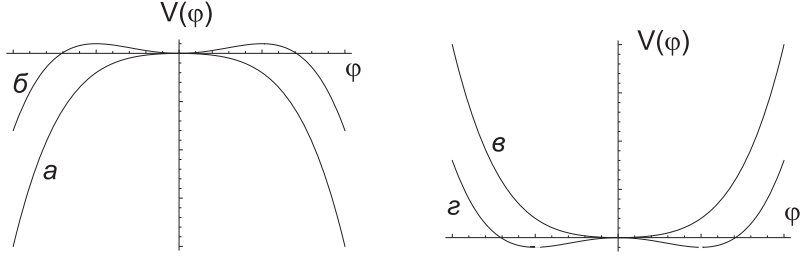


Рис. 1: Різні форми потенціальної частини лагранжіана. По вісі ординат відкладено потенціал $V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$, у якому: а) $\mu^2, \lambda < 0$, б) $\mu^2 > 0, \lambda < 0$, в) $\mu^2, \lambda > 0$, г) $\mu^2 < 0, \lambda > 0$. По вісі абсцис відкладено значення польової функції φ .

тобто,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2 + \lambda \varphi^2) \varphi = 0. \quad (2.7)$$

та вираз для знаходження енергії такого поля

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \varphi)^2 + V(\varphi) \right]. \quad (2.8)$$

Основний стан системи визначається конфігурацією поля, за якої енергія системи є мінімальною. Очевидно, що мінімум енергії досягається при часово- та просторово-однорідних розв'язках. У цьому випадку основний стан системи визначатиметься функцією $V(\varphi)$:

$$E = \int d^3x V(\varphi). \quad (2.9)$$

Для несуперечливості умови однорідності з рівнянням руху (2.6) повинна виконуватися умова $\partial V / \partial \varphi = 0$, що і є умовою мінімуму потенціалу $V(\varphi)$.

Вираз (2.9) для енергії основного стану відразу накладає обмеження на значення параметра λ потенціалу $V(\varphi)$. λ повинно бути позитивним, оскільки для $\lambda < 0$ при великих значеннях поля φ потенціал стане негативним (див. Рис. 1 а, б), і система буде прямувати до стану з найменшою енергією $E \rightarrow -\infty$ при $\varphi \rightarrow \infty$. Ця ситуація є

нефізичною, оскільки основний стан системи не буде характеризуватися певним, фіксованим, скінченним значенням енергії. Відповідно, варіанти a , b з Рис. 1 потрібно відкинути і слід покласти $\lambda > 0$.

Розглянемо варіант $\mu^2 > 0$, $\lambda > 0$. В цьому випадку поведінка потенціалу залежно від значення польової функції наведена на Рис. 16. Основний стан системи буде знаходитися в точці мінімуму потенціалу, тобто в $V = 0$ при $\varphi = 0$. Параметр μ можна трактувати як масу кванта скалярного поля, а додатний параметр λ – як параметр, що характеризує відштовхування між квантами поля¹.

Відхилення системи від основного стану описується тим самим полем φ . Лагранжіан для відхилень співпадає з початковим лагранжіаном і також має інваріантність відносно перетворень (2.5), отже, ніякого порушення симетрії тут не відбувається.

Розглянемо варіант $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$. Зробивши відповідні перепозначення, запишемо потенціал для цього випадку як

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \quad (2.10)$$

Поведінка потенціалу залежно від значення польової функції наведена на Рис. 12. Основний стан системи буде знаходитися в точці мінімуму потенціалу, значення якої легко отримати з умови

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = (-\mu^2 + \lambda\varphi^2)\varphi = 0. \quad (2.11)$$

Отже, мінімум потенціалу, а значить і основний стан системи, досягається у двох цілком рівноправних точках²

$$\varphi = \pm\varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.12)$$

у яких потенціал та повна енергія системи набувають найменших значень

$$V(\pm\varphi_0) = -\frac{\lambda}{4}\varphi_0^4, \quad E = V(\pm\varphi_0) \cdot \Omega, \quad (2.13)$$

¹Притягування між квантами поля призводило б до зменшення енергії системи. Доданок $\sim \lambda\varphi^4$ призводить лише до збільшення енергії (2.9).

²Корисно відзначити, що наявність кубічного доданка в потенціалі (2.10) призвела б до появи двох точок мінімуму з різними значеннями потенціалу у них, а ми намагаємося побудувати теорію, де всі точки основного стану є рівноправними. У протилежному випадку, стан системи у точці з більшим значенням потенціалу буде метастабільним: при невеликих збуреннях система залишатиметься у даному стані, при великих збуреннях – система перейде до стану з меншою енергією.

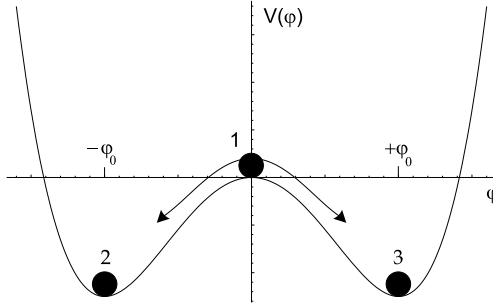


Рис. 2: Ілюстрація спонтанного вибору однієї з двох точок, що відповідають основному стану системи.

де Ω — об'єм системи. Основний стан системи став виродженим.

У якій із двох можливих точок ($\varphi = \pm\varphi_0$) система буде знаходитися в основному стані, визначається спонтанним чином. Інтуїтивно це можна зрозуміти з Рис. 2, якщо припустити, що система спочатку знаходилася в точці $\varphi = 0$, а потім скотилася у стан із найменшою енергією або ліворуч, або праворуч.

Зазначимо: якщо система зайняла основний стан в одній із точок, наприклад 2, то для переходу в точку 3 їй слід переміститись через точку 1. А для цього потрібно змінити енергію у всьому об'ємі (Ω), що займає система, на величину

$$\Delta E = [V(\varphi = 0) - V(-\varphi_0)] \Omega = \frac{\lambda}{4} \varphi_0^4 \cdot \Omega. \quad (2.14)$$

Якщо в якості системи розглядати Всесвіт, то такі переходи важко здійснити ($\Omega \rightarrow \infty$). Отже, обравши певну точку мінімуму, система буде в ній знаходитися і в подальшому. Якщо ж об'єм системи є невеликим, то можуть існувати тунельні переходи між різними точками основного стану. Надалі ми вважатимемо, що система займає великий об'єм.

Перш ніж рухатися далі, перепишемо лагранжіан (2.3) у зручному для нас вигляді. Як відомо, додавання до лагранжіана довільної константи не змінює фізичних наслідків теорії, якщо не цікавитися гравітаційними ефектами. Тому віднімемо від лагранжіана константу $V(\varphi_0)$, щоб основному стану відповідало нульове значення потенціалу

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \varphi_0^2)^2. \quad (2.15)$$

Тепер, замість параметрів λ, μ , що характеризували потенціал (2.10), зручно перейти до параметрів λ, φ_0 .

Сама по собі система в основному стані не є спостережуваною. Спостереження пов'язане зі зміною фізичних величин. Тому розглянемо збурення над основним станом системи, наприклад, в околі точки $\varphi = +\varphi_0$, а саме, коли $\varphi = \varphi_0 + \chi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi) &= \frac{1}{2} \partial_\nu \chi \partial^\nu \chi - \frac{\lambda}{4} ((\varphi_0 + \chi)^2 - \varphi_0^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\nu \chi \partial^\nu \chi - \frac{2\varphi_0^2 \lambda}{2} \chi^2 - \varphi_0 \lambda \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4, \end{aligned} \quad (2.16)$$

де ми залишили кінетичні доданки. Оскільки в точці $\varphi = \varphi_0 + \chi$ потенціал $V(\varphi)$ вже не знаходиться у своєму мінімумі $\partial V / \partial \varphi \neq 0$, то для узгодження з рівнянням руху (2.6) поле χ має містити координатну залежність $\chi = \chi(x)$. У зв'язку з тим, що розглядаються малі збурення навколо точки мінімуму потенціалу, необхідно додатково накласти умову $\chi \ll f_0$, що забезпечує значення потенціалу в межах правої западини потенціалу, див. Рис. 2.

Як бачимо, лагранжіан поля χ (2.16) суттєво відрізняється від лагранжіана поля φ . По-перше, поле χ стало масивним полем¹ із масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$, по-друге, в лагранжіані з'явилися кубічні за полем доданки, тобто лагранжіан поля χ не має симетрії відносно перетворень $\chi \rightarrow -\chi$.

Таким чином, ми явно спостерігаємо порушення симетрії в околі основного стану системи. Якщо дві точки основного стану $\pm\varphi_0$ є цілком рівноправними, і система довільним (спонтанним) чином обирає, в якій точці вона буде знаходитися, то таке порушення симетрії називають спонтанним порушенням симетрії.

На завершення відзначимо, що поява маси у поля χ є передбачуваною, оскільки потенціал (2.10) у безпосередньому околі точок $\pm\varphi_0$ зростає згідно з квадратичним законом, і відповідний коефіцієнт при χ^2 є позитивним. Для порівняння: поле φ в околі точки $\varphi = 0$ спадає згідно з квадратичним законом, і відповідний коефіцієнт при χ^2 є негативним, див. Рис. 2.

¹Поле φ не можна назвати масивним полем, оскільки, формально, згідно з

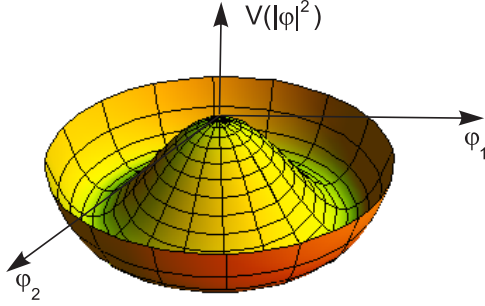


Рис. 3: Ілюстрація поведінки потенціалу (2.18).

2.2 Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $U(1)$

За аналогією з попереднім випадком, розглянемо лагранжیان зарядженого скалярного поля, що має інваріантність відносно глобальних перетворень групи $U(1)$ та має потенціал, подібний до (2.10):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|^2), \quad (2.17)$$

де $|\varphi|^2 = \varphi^* \varphi$, а потенціал заданий виразом

$$V(|\varphi|^2) = -\mu^2 |\varphi|^2 + \lambda [|\varphi|^2]^2. \quad (2.18)$$

Поведінка потенціалу (2.18) проілюстрована на Рис. 3, де враховано, що комплексну функцію φ можна представити за допомогою двох дійсних функцій $\varphi_{1,2}$:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad |\varphi|^2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2}. \quad (2.19)$$

Лагранжیان (2.17), очевидно, має інваріантність відносно глобальних перетворень групи $U(1)$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\alpha} \varphi; \quad \varphi^* \rightarrow \varphi'^* = \varphi^* e^{-i\alpha}, \quad (2.20)$$

потенціалом (2.10), маса кванта поля є уявною $m_\varphi = i\mu$.

або, мовою дійсних функцій, відносно перетворень, що зберігають суму квадратів функцій $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \text{const}$, тобто відносно перетворень поворотів:

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi'_1 = \varphi_1 \cos \delta - \varphi_2 \sin \delta; \quad (2.21)$$

$$\varphi_2 \rightarrow \varphi'_2 = \varphi_1 \sin \delta + \varphi_2 \cos \delta. \quad (2.22)$$

Із явного вигляду лагранжіана (2.17) випливає рівняння руху для скалярного нейтрального поля

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{\partial V}{\partial |\varphi|^2} \right) \varphi = 0, \quad (2.23)$$

тобто

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2 + 2\lambda |\varphi|^2) \varphi = 0, \quad (2.24)$$

та вираз для енергії поля

$$E = \int d^3x \left[\sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \varphi)^* (\partial_\mu \varphi) + V(|\varphi|^2) \right]. \quad (2.25)$$

Основний стан системи, як і у випадку нейтрального поля, буде визначатися однорідним, стаціонарним розв'язком. Енергія основного стану буде визначатися мінімумом потенціалу, див. (2.23),

$$\frac{\partial V}{\partial |\varphi|^2} = -\mu^2 + 2\lambda |\varphi|^2 = 0, \quad (2.26)$$

який буде реалізований у нескінченній множині значень φ_1, φ_2 , що знаходитимуться на колі радіуса μ^2/λ в жолобку, в найнижчій частині Рис. 3:

$$|\varphi|^2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{\varphi_0^2}{2}. \quad (2.27)$$

Отже, основний стан системи знову є виродженим. Як бачимо, потенціал (2.18) є узагальненням потенціалу (2.10) і отримується шляхом обертання останнього. При цьому, якщо система опинилася в певному основному стані, то її перехід в інший основний стан за кінцевий проміжок часу є малоймовірним за рахунок кінетичного доданку в енергії системи, оскільки для такого переходу слід витратити енергію

$$\Delta E = \frac{\Delta \varphi^*}{\Delta T} \frac{\Delta \varphi}{\Delta T} \Omega, \quad (2.28)$$

де Ω – об’єм системи ($\Omega \rightarrow \infty$). Отже, обравши певну точку мінімуму, система буде в ній знаходитися і в подальшому. Якщо ж об’єм системи є невеликим, то переходить між різними точками основного стану є можливими. Надалі ми вважатимемо, що система займає великий об’єм.

Як і в Розділі 2.1, шляхом додавання до лагранжіана константи, зробимо так, щоб основному стану відповідала нульова енергія, а саме: модифікуємо потенціал до вигляду

$$V(|\varphi|^2) = \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2 \quad (2.29)$$

та будемо характеризувати його параметрами λ, φ_0 .

Розглянемо малі збурення над основним станом. Для цього виберемо одну з точок, що задовольняє умову (2.27), наприклад, для простоти, $\varphi_1 = \varphi_0 = \mu/\sqrt{\lambda}$, $\varphi_2 = 0$. А відхилення від цієї точки запишемо за допомогою двох дійсних польових функцій χ, θ

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \chi, \quad \varphi_2 = \theta, \quad (2.30)$$

котрі задовольняють умову $\chi, \theta \ll \varphi_0$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \lambda \left(\frac{(\varphi_0 + \chi)^2 + \theta^2}{2} - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{2\lambda\varphi_0^2}{2} \chi^2 - \lambda\varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \right) + \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4} \theta^4 \right) + \\ &\quad + \left(-\lambda\varphi_0 \theta^2 \chi - \frac{\lambda}{2} \theta^2 \chi^2 \right) = \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_\theta + \mathcal{L}_{int}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Як бачимо, в даному лагранжіані можна виділити лагранжіан масивного нейтрального скалярного поля χ з масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$ (повністю ідентичний лагранжіану (2.16)), лагранжіан безмасового нейтрального скалярного поля θ та лагранжіан взаємодії полів χ та θ .

Проаналізуємо отриманий результат. Масивним поле χ стало тому, що йому відповідало збурення початкового лагранжіана в радіальному напрямку до кола радіуса φ_0 , де знаходився мінімум потенціалу. При такому збуренні значення потенціалу поля зростає за квадратичним законом. Поле θ відповідає збуренням, що йдуть по дну жолобка

потенціалу у дотичному (тангенціальному) напрямку до кола радіуса φ_0 . Саме це й обумовлює відсутність квадратичних за θ доданків у лагранжіані – при малих значеннях θ потенціал не змінюватиметься. При подальшому збільшенні значення θ потенціал почне зростати, оскільки поле θ зростає у напрямку перпендикулярному до вісі φ_1 , а жолобок у цьому напрямку вже буде вигинатися по колу, що й відповідатиме появі доданку $\sim \theta^4$ у лагранжіані.

Як і у випадку, розглянутому в Розділі 2.1, лагранжіан (2.31), що описує збурення над основним станом, не має симетрії (2.21) початкового лагранжіана. Відзначимо, що безмасове скалярне поле (θ), яке утворюється в результаті спонтанного порушення симетрії, називають полем Намбу-Голдстоуна.

Подивимось, що буде, якщо б ми обрали іншу точку на колі (2.27), де знаходиться мінімум потенціалу. Задамо цю точку у вигляді

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \xi, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \sin \xi, \quad (2.32)$$

де $\xi \in (0, 2\pi)$ – довільний параметр. Перше, що хочеться зробити, це розглянути збурення у вигляді $\varphi'_1 = \varphi_0 \cos \xi + \alpha$, $\varphi'_2 = \varphi_0 \sin \xi + \beta$, де α , β нові поля. Однак, це призводить до появи в лагранжіані квадратичної за полями частини

$$\mathcal{L}_m = -\lambda\varphi_0^2 [\alpha^2 \cos^2 \xi + \alpha\beta \sin 2\xi + \beta^2 \sin^2 \xi], \quad (2.33)$$

котра відповідає недіагональній масовій матриці:

$$\mathcal{L}_m = -(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \lambda\varphi_0^2 \cos^2 \xi & \lambda\varphi_0^2 \sin \xi \cos \xi \\ \lambda\varphi_0^2 \sin \xi \cos \xi & \lambda\varphi_0^2 \sin^2 \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\Phi^T M^2 \Phi. \quad (2.34)$$

Це означає, що поля α та β не є полями у масовому базисі і, відповідно, говорити про маси квантів цих полів не можна. Іншими словами, поля α та β є суперпозиціями полів, чий кванти мають певні маси. Для переходу в масовий базис потрібно діагоналізувати масову матрицю.

Як відомо, симетричну матрицю можна діагоналізувати шляхом унітарних перетворень

$$\mathcal{L}_m = -\Phi^T U U^T M^2 U U^T \Phi = -\Phi'^T U^T M^2 U \Phi', \quad (2.35)$$

де $\Phi' = U^T \Phi$ – польова функція у масовому базисі. Унітарну матрицю U ми обрали дійсною (тобто $U^+ = U^T$, $U^+ U = U^T U = 1$) та такою, щоб $U^T M U = m(\text{diagonal})$. Отримаємо матрицю переходу

$$U = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

діагональну масову матрицю

$$m^2 = U^T M^2 U = \begin{pmatrix} \lambda \varphi_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

та польові функції у масовому базисі

$$\Phi' = U^T \Phi = \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi + \beta \sin \xi \\ -\alpha \sin \xi + \beta \cos \xi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \chi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

де χ, θ — нові поля, що являють собою збурення в радіальному (поле χ з масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$) та тангенціальному (безмасове поле θ) напрямках відносно кола мінімуму потенціалу (2.32). Відзначимо, що збудження (2.30) також відповідають радіальному (χ) та тангенціальному (θ) збудженням.

Використавши співвідношення (2.38), можна отримати обернене перетворення

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \cos \xi - \theta \sin \xi \\ \chi \sin \xi + \theta \cos \xi \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

і записати збурення над основним станом у термінах масових полів χ, θ :

$$\varphi'_1 = \varphi_0 \cos \xi + \chi \cos \xi - \theta \sin \xi, \quad \varphi'_2 = \varphi_0 \sin \xi + \chi \sin \xi + \theta \cos \xi. \quad (2.40)$$

Можна показати, що збуджений стан (2.40) приводить до того ж лагранжіана (2.31), що й для випадку $\xi = 0$. Отже, фізичні характеристики системи не залежать від того, який саме із можливих основних станів займе система.

Розглянемо тепер збурення відносно довільної точки на колі (2.27), але оберемо у якості двох ступенів вільності фізичної системи¹ радіус та полярний кут у площині φ_1, φ_2 . Позначимо $r = \varphi_0$, тоді незбурені функції основного стану будуть

$$\varphi_1 = r \cos \xi, \quad \varphi_2 = r \sin \xi; \quad (2.41)$$

а, відповідно, збурені функції матимуть вигляд,

$$\varphi'_1 = (r + dr) \cos(\xi + d\xi), \quad \varphi'_2 = (r + dr) \sin(\xi + d\xi). \quad (2.42)$$

У першому порядку малості можна записати

$$\begin{cases} \varphi'_1 = r \cos \xi + dr \cos \xi - r d\xi \sin \xi \\ \varphi'_2 = r \sin \xi + dr \sin \xi + r d\xi \cos \xi \end{cases}, \quad (2.43)$$

¹Комплексне скалярне поле має два ступеня вільності.

де dr та $rd\xi$ радіальні та тангенціальні збурення, які вже будуть залежати від 4-координат ($dr = dr(x)$, $d\xi = d\xi(x)$). Наведений збурений стан буде співпадати зі станом (2.40), якщо позначити радіальне збурення як $dr = \chi$, а тангенціальне збурення як $rd\xi = \theta$.

Корисно переписати наші вирази в термінах комплексних функцій φ та φ^* . Відзначимо, що запис основного стану у вигляді

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{i\xi} = \frac{r}{\sqrt{2}} e^{i\xi} = \frac{r \cos \xi + ir \sin \xi}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{-i\xi} \quad (2.44)$$

відновлює функції $\varphi_{1,2}$ у вигляді (2.41). Збурення ж над основним станом (2.42) без жодних наближень можна представити у зручному для розрахунків вигляді:

$$\varphi' = \frac{r + dr}{\sqrt{2}} e^{i(\xi + d\xi)}, \quad \varphi'^* = \frac{r + dr}{\sqrt{2}} e^{-i(\xi + d\xi)}. \quad (2.45)$$

Використання його підводить до висновку, що фізичне поле пов'язане зі ступенем вільності, який задається безрозмірним параметром ξ , є безмасовим, оскільки параметр ξ не входить до потенціалу $V = V(|\varphi'|^2)$, а виявляє себе лише в кінетичних доданках. Іншими словами, у представленні (2.45) параметр ξ є параметром локальних калібрувальних перетворень групи $U(1)$ ($\xi = \xi(x)$), відносно яких потенціал $V(|\varphi'|^2)$ є інваріантним. Відповідно, масивним буде лише поле, пов'язане зі ступенем вільності $dr = \chi$, що явно входить до потенціалу.

Може виникнути підозра щодо проведення тут деяких математичних маніпуляцій у зв'язку з тим, що попередній розгляд збурень над основним станом у вигляді (2.30) або (2.43) показав, ніби потенційна частина лагранжіана містить обидва типи збурень. Це пояснюється тим, що вираз (2.43) є лише першим наближенням до повного виразу для збурених функцій (2.42), а збурення у (2.30) є частковим випадком збурень (2.43) для значення полярного кута $\xi = 0$.

2.3 Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $SU(2)$

Оскільки група $SU(2)$ відіграє ключову роль у СМ, ми детально розглянемо, як відбувається спонтанне порушення симетрії для неї.

Лагранжіан скалярного поля, що має $SU(2)$ симетрію, має вигляд

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - V(|\phi|^2), \quad (2.46)$$

де потенціал задається виразом

$$V(|\phi|^2) = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda[|\phi|^2]^2, \quad (2.47)$$

польові функції є

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \phi^+ = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}; & \frac{\phi_3 - i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

де φ_i є дійсними функціями, $|\phi|^2 = \phi^+ \phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)/2$.

Лагранжіан (2.46) є інваріантним відносно глобальних перетворень групи $SU(2)$, а саме, поворотів у ізотопічному просторі

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\xi}}{2}} \phi \\ \phi^+ \rightarrow \phi'^+ = \phi^+ e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\xi}}{2}} \end{cases}, \quad (2.49)$$

де $\vec{\xi} = \xi\vec{\nu}$; $\vec{\nu} = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ — одиничний вектор, що визначає напрямок вісі, відносно якої робиться поворот в ізотопічному просторі; ξ — кут повороту в радіанах; $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ — матриці Паулі.

Основний стан системи визначається з умови $\partial V/\partial|\phi|^2 = 0$, є виродженим та знаходиться у множині точок на поверхні сфери в 4-вимірному просторі з радіусом $\varphi_0 = \mu/\sqrt{\lambda}$

$$|\phi_0|^2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{\varphi_0^2}{2}. \quad (2.50)$$

Як і раніше, шляхом додавання до лагранжіана константи, зробимо так, щоб основному стану відповідала нульова енергія:

$$V(|\phi|^2) = \lambda \left(|\phi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2. \quad (2.51)$$

Нехай основний стан буде описуватися функцією

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Розглянемо малі збурення над основним станом у вигляді

$$\phi \rightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \varphi_0 + \gamma + i\delta \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Звичайно, ми ввели 4 нові функції $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, оскільки в початковому лагранжіані було 4 ступені вільності (поля φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$).

Перш ніж рухатися далі, слід відзначити, що

$$\vec{\tau\theta} = \tau_1\theta_1 + \tau_2\theta_2 + \tau_3\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Тоді для малих значень безрозмірних величин θ_i матимемо

$$e^{i\frac{\vec{\tau\theta}}{2}}\phi_0 = \left(1 + i\frac{\vec{\tau\theta}}{2}\right)\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_0 \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ \varphi_0 \left(1 - i\frac{\theta_3}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Отже, зробивши відповідні перепозначення, ми можемо виразити три функції (α, β, δ) у виразі для ϕ' (2.53) через параметри θ_i . Повністю ж функцію ϕ' можна альтернативно записати у вигляді

$$\phi' = e^{i\frac{\vec{\tau\theta}}{2}}\phi'_0; \quad \phi'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Таким чином, від чотирьох функцій збурень $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ у (2.53) ми перейшли до опису системи за допомогою чотирьох функцій θ_i (де $i = 1, 2, 3$), χ .

За допомогою представлення (2.56) можна відразу зробити висновок, що потенціал $V(\phi^+\phi)$ не буде залежати від функцій θ_i і відповідні поля будуть безмасовими полями Намбу-Голдстоуна. Підставивши у потенціал (2.51) збурену функцію у формі ϕ'_0 (2.56), отримаємо

$$V(|\phi'_0|^2) = \frac{2\lambda\varphi_0^2}{2}\chi^2 + \lambda\varphi_0\chi^3 + \frac{\lambda}{4}\chi^4, \quad (2.57)$$

відповідно маса кванта нейтрального скалярного поля $\chi \in m_\chi = \sqrt{2\lambda}\varphi_0$.

2.4 Теорема Голдстоуна

Розглянемо на якісному рівні теорему Голдстоуна [6], що визначає кількість безмасових (голдстоунівських) бозонів виходячи з симетрійних властивостей лагранжіану, та її доведення. Для простоти зупинимось на лагранжіані дійсного скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi - V(\varphi), \quad (2.58)$$

що є інваріантним відносно глобальних перетворень компактної групи G (має унітарне представлення $g \in G$), а саме $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(g\varphi)$ та, зокрема, $V(\varphi) = V(g\varphi)$.

Нехай мінімум потенціалу реалізується для ненульового значення поля φ . Позначимо функцію основного стану системи як Φ_0 . Збурення над основним станом призведуть до зміни потенціалу, а саме для малих відхилень від основного стану

$$V(\varphi') = V(\Phi_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi=\Phi_0} \psi_i \psi_j + O(\delta\varphi^3), \quad (2.59)$$

де $\psi_k = \delta\varphi_k$ – відхилення поля φ_k від свого значення в основному стані системи. Також ми врахували, що в точці мінімуму потенціалу $\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \Big|_{\varphi=\Phi_0} = 0$.

Симетрична матриця

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi=\Phi_0} \quad (2.60)$$

являє собою масову матрицю для полів ψ_i . Оскільки потенціал у точці Φ_0 знаходиться в мінімумі, то елементи масової матриці є додатними $M_{ij} > 0$. Знаючи явно елементи M_{ij} , можна однозначно визначати маси полів ψ_i .

Виявляється, ми можемо отримати інформацію щодо елементів M_{ij} не беручи явно похідні від потенціалу, а лише знаючи симетрійні властивості вакуумного стану [7]. Пояснимо сказане.

У загальному випадку основний стан системи не є інваріантним відносно перетворень групи G : $\Phi'_0 = g\Phi_0 \neq \Phi_0$, однак він може бути інваріантним відносно деякої підгрупи H групи G : $\Phi'_0 = h\Phi_0 = \Phi_0$, де h – представлення підгрупи H , $h \in G$.

Розкладемо потенціал V у точці $\Phi'_0 = g\Phi_0$ відносно точки Φ_0 згідно з (2.59):

$$V(\Phi'_0) = V(\Phi_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi=\Phi_0} \delta\varphi_i \delta\varphi_j + \dots \quad (2.61)$$

Оскільки потенціал є інваріантним відносно перетворень групи G : $V(\Phi'_0) = V(g\Phi_0) = V(\Phi_0)$, – то у даному випадку

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi=\Phi_0} \delta\varphi_i \delta\varphi_j = 0. \quad (2.62)$$

Основна ідея доведення теореми Голдстоуна полягає у тому, що при перетворенні основного стану за допомогою елемента групи G , що належить підгрупі H , основний стан системи не змінюється: $\Phi_0 = h\Phi_0$. У цьому випадку, зміна певної кількості польових функцій відбуватися не буде $\delta\varphi_k = 0$. Тоді, згідно з (2.62), відповідні елементи масової матриці M_{ij} можуть не дорівнювати нулю і визначатимуть значення маси масивних бозонів. Якщо ж здійснити перетворення основного стану системи за допомогою елемента групи G , що не належить підгрупі H , то основний стан системи зміниться і для певної кількості польових функцій $\delta\varphi_m \neq 0$. Це означатиме, що відповідні елементи масової матриці M_{ij} мають дорівнювати нулю і їх кількість визначатиме кількість безмасових бозонів.

Якщо від групи G забрати елементи підгрупи H , то утвориться об'єкт G/H , що не є групою (звичайно, оскільки прибирається і одиничний елемент, що належить H). Елементи G/H утворюють сукупність *суміжних класів*. Сформулюємо тепер *теорему Голдстоуна*: *кількість голдстоунівських (безмасових) бозонів дорівнює розмірності простору G/H (позначають $\dim G/H$), що дорівнює кількості генераторів групи G мінус кількість генераторів підгрупи H* . Отриманий результат не залежить від явної форми потенціалу V , від вибору представлення групи G та справедливий як для дійсних, так і для комплексних полів.

Перевіримо дане твердження на конкретних прикладах.

Для групи $U(1)$ вакуумний стан визначається рівнянням $\varphi^*\varphi = \varphi_0^2/2$ (див. явний вигляд потенціалу (2.29)), і, відповідно, може бути представлений у вигляді

$$\Phi_0 = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{i\xi}, \quad (2.63)$$

де ξ довільне дійсне число. У даному випадку $G = U(1)$, $g = e^{i\alpha}$, відповідно $g\Phi_0 = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{i(\xi+\alpha)} \neq \Phi_0$. Інваріантна підгрупа H відсутня (або являє собою одиничний елемент), відповідно, розмірність G/H дорівнює розмірності групи G і дорівнює одиниці. Тобто, в теорії буде присутній один голдстоунівський бозон.

Для групи $SU(2)$ вакуумний стан скалярного поля

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

визначається рівнянням (2.50)

$$\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2}{2} = \frac{\varphi_0^2}{2}.$$

У найпростішому вигляді він може бути представлений як

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Група $G = SU(2)$ має три генератори. Інваріантна підгрупа H відсутня (або являє собою одиничний елемент), відповідно розмірність G/H дорівнює розмірності групи G і дорівнює трьом. Отже, в теорії будуть присутні три голдстоунівських бозона.

3 Генерація мас калібрувальних полів та полів матерії

3.1 Механізм Хіггса генерації маси калібрувальних полів

Розглянемо механізм, що забезпечує появу маси у калібрувальних полів у моделях зі спонтанним порушенням симетрії на прикладі $U(1)$ початкової симетрії лагранжіана скалярного поля.

Згідно з Розділом 2.2, лагранжіан із глобальною калібрувальною інваріантністю відносно групи $U(1)$ має вигляд:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2. \quad (3.65)$$

Звідси легко отримати лагранжіан із локальною калібрувальною інваріантністю, що забезпечується введенням безмасового калібрувального поля

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi - \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.66)$$

де $D_\mu \varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Даний лагранжіан є інваріантним до перетворень

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\alpha} \varphi; \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (3.67)$$

Розглянемо збудження скалярного поля відносно основного стану у вигляді (2.45)

$$\varphi' = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}} e^{-i\xi}. \quad (3.68)$$

Отримаємо для лагранжіана (3.66)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi}{2} + \frac{\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi}{2} (\varphi_0^2 + 2\varphi_0 \chi + \chi^2) - \frac{(\sqrt{2\lambda} \varphi_0)^2}{2} \chi^2 - \lambda \varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 + \\ & + e(\varphi_0^2 + 2\varphi_0 \chi + \chi^2) \partial_\mu \xi A^\mu + \frac{e^2}{2} (\chi^2 + 2\varphi_0 \chi) A_\mu A^\mu + \\ & + \frac{(e\varphi_0)^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.69) \end{aligned}$$

із якого випливає, що калібрувальне поле набуває маси $m_A = e\varphi_0$, скалярне поле χ набуває маси $m_\chi = \sqrt{2\lambda}\varphi_0$, а поле¹ ξ є безмасовим.

Отриманий лагранжіан містить доданки взаємодії скалярних полів χ та ξ між собою та з калібрувальним полем A_μ . Однак взаємодія з голдстоунівським полем ξ є нефізичною, оскільки поле ξ може бути взагалі виключене із теорії, а саме, воно може бути поглинуте полем A_μ за допомогою заміни

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \xi. \quad (3.70)$$

У результаті отримаємо лагранжіан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi}{2} - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \lambda \varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 + \\ & + \frac{e^2}{2} (\chi^2 + 2\varphi_0 \chi) A_\mu A^\mu + \frac{m_A^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

що відповідає системі, у якій скалярне поле знаходиться у збудженому стані у формі

$$\varphi' = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}}, \quad (3.72)$$

де відсутнє збудження по уявній частині поля.

Лагранжіан (3.71) містить масивне векторне поле та не містить поля голдстоунівського бозона. Безумовно, такий лагранжіан вже не є калібрувально інваріантним, оскільки калібрування вже було зафіксовано виразом (3.70). Таке калібрування отримало назву *унітарного калібрування*.

Необхідно звернути увагу, що безмасове векторне поле має лише дві фізичні проекції спіну частинок $(+1, -1)$: проекції вздовж та проти напрямку руху. Таким чином воно характеризується двома ступенями вільності. На відміну від цього випадку, масивне векторне поле характеризується трьома ступенями вільності: фізичні проекції спіну частинок $(+1, 0, -1)$. У наведеному вище механізмі Хіггса кількість ступенів вільності зберігається, а саме: ступінь вільності, що відповідав уявній частині скалярного поля перейшов у третій ступінь вільності

¹Величина ξ є безрозмірною функцією. У Розділі 2.2 їй ставилося у відповідність голдстоунівське бозонне поле $\theta = \varphi_0 \xi$.

масивного векторного поля. Тому часто вживається жаргонний вираз: калібрувальне поле "з'їло" голдстоунівський бозон і стало масивним.

В загальному випадку лагранжіана з довільною групою симетрії маса калібрувальних полів генерується кінетичними доданками полів матерії з подовженими похідними:

$$(D_\mu \phi)^+ D^\mu \phi = ((\partial^\mu - igT^a A^{\mu,a})\phi)^+ (\partial_\mu - igT^b A_\mu^b)\phi = \quad (3.73)$$

$$\partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi - ig(\partial_\mu \phi^+ T^a \phi - \phi^+ T^a \partial_\mu \phi) A^{\mu,a} + g^2 \phi^+ T^a T^b \phi A^{\mu,a} A_\mu^b.$$

Якщо скалярне поле матерії знаходиться в основному стані: $\varphi = \varphi_0$, то останній доданок визначатиме масову матрицю калібрувальних полів

$$g^2 \phi_0^+ T^a T^b \phi_0 A^{\mu,a} A_\mu^b = m_{ab} A^{\mu,a} A_\mu^b. \quad (3.74)$$

Припустимо, що або основний стан або генератори обрані так, що масова матриця є діагональною¹, тоді

$$g^2 \phi_0^+ T^a T^a \phi_0 A^{\mu,a} A_\mu^a = m_a A^{\mu,a} A_\mu^a, \quad m_a = g^2 \phi_0^+ T^a T^a \phi_0, \quad (3.75)$$

де m_a є масою поля A_μ^a .

Припустимо, що існують групові перетворення за допомогою певного генератора відповідної групи, при яких вакуумний стан скалярного поля не змінюється:

$$\phi_0 \rightarrow \phi'_0 = (1 - i\alpha T^a)\phi_0 = \phi_0, \quad (3.76)$$

відповідно $T^a \phi_0 = 0$ і поле A_μ^a з даним груповим індексом є безмасовим.

Наприклад, лагранжіан (2.46) є інваріантним відносно непростой компактної $U(1) \times SU(2)$ групи симетрії. З чотирьох генераторів такої групи $\tau^i/2$, $I/2$ можна створити такі генератори: $\tau^1/2$, $\tau^2/2$, $(I - \tau^3)/2$, $(I + \tau^3)/2$. Нехай основний стан буде описуватися виразом (2.52), тоді

$$T\phi_0 \neq \phi_0, \quad T = a\tau^1/2 + b\tau^2/2 + c(I - \tau^3)/2, \quad (3.77)$$

$$T\phi_0 = 0, \quad T = (I + \tau^3)/2. \quad (3.78)$$

¹ Якщо ні, то треба унітарними перетвореннями калібрувальних полів зробити масову матрицю діагональною.

Відповідно для даного лагранжіана буде одне безмасове калібрувальне поле та три масивних.

Узагальнимо отриманий результат за допомогою теореми Голдстоуна: для калібрувальних теорій зі спонтанним порушенням симетрії (в унітарному калібруванні) голдстоунівські бозони зникають, а рівна їм кількість калібрувальних полів стають масивними. Отже, калібрувальні теорії зі спонтанним порушенням симетрії скалярного поля групи G будуть містити відповідні калібрувальні поля в кількості $\dim G$, із яких масивними будуть $\dim G/H$ полів.

Наприклад, якщо для групи $SO(3)$ у стані з непорушеною симетрією ми мали три безмасових скалярних поля та три безмасових векторних калібрувальних поля, то після порушення симетрії будемо мати одне масивне хіггсівське скалярне поле, два масивних калібрувальних поля та одне калібрувальне безмасове поле¹. Для групи $SU(2)$ у стані з непорушеною симетрією ми мали чотири безмасових скалярних поля та три безмасових векторних калібрувальних поля, а після порушення симетрії будемо мати одне масивне хіггсівське скалярне поле та три масивних калібрувальних поля².

Як можна зрозуміти, всі переваги сценарію спонтанного порушення симетрії реалізуються завдяки тому, що система переходить в основний стан з ненульовим значенням скалярної польової функції. При цьому симетрія основного стану є меншою за симетрію початкового стану системи. Дана ситуація може відбутися лише для теорій бозонних полів, оскільки на рівні вторинноквантованої теорії поля ненульове стале значення польової функції в основному стані системи відповідає існуванню конденсату частинок в основному стані системи, який не може бути реалізований для Фермі частинок згідно з принципом Паулі.

За допомогою векторних полів реалізувати сценарій спонтанного порушення симетрії також неможливо. Справа в тому, що якщо в певній системі відліку компоненти векторного поля мають певні вакуумні середні, тобто $A_\nu(x) = \lambda_\nu + \chi_\nu(x)$, то при переході до іншої системи

¹Група $G = SO(3)$, група $H = SO(2)$, $\dim SO(3) = 3$, $\dim SO(2) = 1$, $\dim SO(3)/SO(2) = 3 - 1 = 2$.

²Група $G = SU(2)$, група $H = E$ – одинична, $\dim SU(2) = 3$, $\dim E = 0$, $\dim SU(2)/H = 3 - 0 = 3$.

відліку вони зміняться, див. Додаток 3. Отже така теорія втратить інваріантність відносно перетворень Лоренца. Те ж саме буде і для полів з вищими цілими значеннями спіну. Скалярне ж поле виділяється саме тим, що воно не змінюється при перетвореннях Лоренца.

3.2 Генерація мас калібрувальних полів в СМ

В СМ поле Хіггса являє собою ізотопічний дублет групи $SU(2)$.

Вважається [8], що на ранніх етапах розвитку Всесвіту поле Хіггса знаходилося у станах із високою енергією. У подальшому, у процесі охолодження Всесвіту, поле Хіггса також втрачало свою енергію. У певний момент часу¹ відбувся так званий електрослабкий фазовий перехід, коли хіггсівське поле спонтанним чином опустилося поблизу одного зі своїх можливих основних станів, що визначаються умовою $H_0^+ H_0 = v^2/2$. Відповідно, до цього моменту калібрувальні поля (та частинки матерії) були безмасовими.

Згідно із Розділом 2.3, в околі свого основного стану хіггсівське поле можна представити у вигляді, див. (2.56),

$$H = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

де h — нейтральне скалярне поле, а стала v отримала назву *вакуумного середнього поля Хіггса*, оскільки вона визначає стан з найменшою енергією.

Оскільки лагранжіан СМ є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень, ми можемо зафіксувати калібрування відносно перетворень групи $SU_W(2)$, обравши

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Таке калібрування називають *унітарним*. Якщо його не вводити, то до СМ будуть входити інші збудження поля Хіггса θ_i , що суттєво

¹Цей момент можна грубо оцінити як такий, коли температура Всесвіту була близькою до маси калібрувальних $W^{\pm}, Z$ -бозонів, тобто при $T \sim 100$ GeV, або через 0.1 наносекунду після великого вибуху.

ускладнить розрахунок різноманітних процесів. Однак, наявність полів θ_i не буде впливати на кінцевий результат розрахунків. Тому вибір калібрування в унітарному вигляді це спосіб суттєво спростити розрахунки, використовуючи локальну калібрувальну інваріантність лагранжіана СМ.

Як уже відомо з Розділу 3.1, калібрувальні поля отримують масу з кінетичних доданків скалярного поля з ненульовим вакуумним середнім. Розглянемо кінетичний доданок хіггсівського поля [9]

$$\mathcal{L}_{kin}^H = (D^\mu H)^+ D_\mu H, \quad (3.81)$$

де

$$D_\mu H = \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{V}_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) H \quad (3.82)$$

та ми врахували, що гіперзаряд поля Хігса $Y_H = 1$. Використовуючи для хіггсівського поля вираз в унітарному калібруванні (3.80), останній вираз можна записати як

$$\begin{aligned} D_\mu H &= \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \frac{g}{2} V_\mu^3 - i \frac{g'}{2} B_\mu & -i \frac{g}{2} (V_\mu^1 - i V_\mu^2) \\ -i \frac{g}{2} (V_\mu^1 + i V_\mu^2) & \partial_\mu + i \frac{g}{2} V_\mu^3 - i \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i \frac{g}{2} (V_\mu^1 - i V_\mu^2) \frac{v+h}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} + i \frac{g}{2} V_\mu^3 \frac{v+h}{\sqrt{2}} - i \frac{g'}{2} B_\mu \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Вираз для $(D^\mu H)^+$ отримується із (3.83) шляхом ермітового спряження та піднімання індексу μ :

$$\begin{aligned} (D^\mu H)^+ &= \\ &= \left(i \frac{g}{2} (V^{1,\mu} + i V^{2,\mu}) \frac{v+h}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\partial^\mu h}{\sqrt{2}} - i \frac{g}{2} V^{3,\mu} \frac{v+h}{\sqrt{2}} + i \frac{g'}{2} B^\mu \frac{v+h}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

У результаті отримуємо доданки:

$$\begin{aligned} (D^\mu H)^+ D_\mu H &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{g^2}{8} (V^{1,\mu} V_\mu^1 + V^{2,\mu} V_\mu^2 + V^{3,\mu} V_\mu^3) (v+h)^2 + \\ &+ \frac{g'^2}{8} B^\mu B_\mu (v+h)^2 - \frac{gg'}{4} B^\mu V_\mu^3 (v+h)^2. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Масивні доданки калібрувальних полів будуть містити квадратичні комбінації полів без взаємодії з полем Хіггса (h). Такі доданки можна отримати з (3.85), встановивши, що $h = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^{gauge} &= \frac{g^2 v^2}{8} (V^{1,\mu} V_\mu^1 + V^{2,\mu} V_\mu^2) + \\ &+ \frac{g^2 v^2}{8} V^{3,\mu} V_\mu^3 + \frac{g'^2 v^2}{8} B^\mu B_\mu - \frac{gg' v^2}{4} B^\mu V_\mu^3 = \\ &= \frac{g^2 v^2}{8} (V^{1,\mu} V_\mu^1 + V^{2,\mu} V_\mu^2) + \\ &+ (B^\mu; V^{3,\mu}) \begin{pmatrix} g^2 v^2/8 & -gg' v^2/8 \\ -gg' v^2/8 & g'^2 v^2/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (3.86)\end{aligned}$$

Як бачимо, масова частина калібрувальних полів містить недіагональні за полями доданки, а отже, поля V_μ^3 та B_μ не є полями з визначеною масою.

Запишемо масові доданки полів B_μ та V_μ^3 у вигляді

$$X^+ M X, \quad X = \begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} g^2 v^2/8 & -gg' v^2/8 \\ -gg' v^2/8 & g'^2 v^2/8 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

що дозволить нам переписати даний вираз за допомогою певної унітарної матриці w ($w^+ w = w w^+ = 1$):

$$X^+ M X = X^+ w^+ w M w^+ w X. \quad (3.88)$$

Перепозначимо польові функції як $X' = w X$, $X'^+ = X^+ w^+$, та згадаємо, що довільну комплексну симетричну матрицю M можна діагоналізувати за допомогою унітарних перетворень $w^T M w = m$, де m – діагональна матриця [10]. Для випадку матриць 2×2 унітарна матриця задається одним параметром та має вигляд

$$w = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad w^+ = w^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Отже підбором кута θ можна досягнути рівності $X^+ M X = X'^+ m X'$, де m – діагональна матриця.

На практиці зручніше записати "старі" поля через "нові" $X = w^+ X'$, $X^+ = X'^+ w$, тоді $X^+ M X = X'^+ w M w^+ X'$. Далі треба явно

записати вираз $X'^+ w M w^+ X'$ та з умови рівності коефіцієнта поблизу змішаного добутку полів знайти кут θ . Отже, вводимо нові поля:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

Зворотні перетворення мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Слід також відзначити, що комбінації $V_\mu^1 \mp iV_\mu^2$ входять і до інших частин лагранжіана СМ, тому вводяться позначення

$$W_\mu^\pm = \frac{V_\mu^1 \mp iV_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (3.92)$$

або, у зворотному напрямку, –

$$V_\mu^1 = \frac{W_\mu^- + W_\mu^+}{\sqrt{2}}; \quad V_\mu^2 = \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{i\sqrt{2}}. \quad (3.93)$$

У термінах нових полів вираз (3.86) запишеться як

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{gauge} &= \\ &= \frac{g^2 v^2}{8} \left(\frac{(W^{-,\mu} + W^{+,\mu})(W_\mu^- + W_\mu^+)}{2} - \frac{(W^{-,\mu} - W^{+,\mu})(W_\mu^- - W_\mu^+)}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{g^2 v^2}{8} (\sin \theta A^\mu + \cos \theta Z^\mu)(\sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu) + \\ &\quad + \frac{g'^2 v^2}{8} (\cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu)(\cos \theta A_\mu - \sin \theta Z_\mu) - \\ &\quad - \frac{gg' v^2}{4} (\cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu)(\sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu) = \\ &= \frac{g^2 v^2}{4} W^{-,\mu} W_\mu^+ + A^\mu A_\mu \left[\frac{g^2 v^2}{8} \sin^2 \theta + \frac{g'^2 v^2}{8} \cos^2 \theta - \frac{gg' v^2}{4} \sin \theta \cos \theta \right] + \\ &\quad + Z^\mu Z_\mu \left[\frac{g^2 v^2}{8} \cos^2 \theta + \frac{g'^2 v^2}{8} \sin^2 \theta + \frac{gg' v^2}{4} \sin \theta \cos \theta \right] + \\ &\quad + A^\mu Z_\mu \left[\frac{g^2 v^2}{8} 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g'^2 v^2}{8} 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{gg' v^2}{4} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Щоб позбавитися недіагональних доданків, встановимо коефіцієнт поблизу $A^\mu Z_\mu$ рівний нулю. Це нам дозволить знайти кут θ , а саме:

$$\tan(2\theta) = \frac{2gg'}{g^2 - g'^2}, \quad \text{або} \quad \tan \theta = \frac{g'}{g}. \quad (3.95)$$

Відповідно,

$$\cos \theta = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (3.96)$$

а перетворення (3.91) мають вигляд:

$$B_\mu = \cos \theta A_\mu - \sin \theta Z_\mu = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu, \quad (3.97)$$

$$V_\mu^3 = \sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu + \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu. \quad (3.98)$$

Використавши значення (3.95), (3.96), вираз (3.94) запишемо як

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{gauge} &= \frac{g^2 v^2}{4} W^{-,\mu} W_\mu^+ + 0 \cdot A^\mu A_\mu + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z^\mu Z_\mu = \\ &= m_W^2 W^{-,\mu} W_\mu^+ + \frac{m_A^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{m_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Звідси випливає, що заряджене поле $W^\pm$ -бозонів та нейтральне поле Z -бозонів є масивними із масами квантів поля:

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} v, \quad \frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta. \quad (3.100)$$

Водночас поле A_μ є безмасовим ($M_A = 0$) і відповідає електромагнітному полю. Кут θ отримав назву *кута Вайнберга*, він позначається як θ_W . Згідно з експериментальними даними, $\sin^2 \theta_W = 0.231$ ($\theta_W \approx 28.73^\circ$) та залежить від енергій взаємодіючих частинок (на рівні радіаційних поправок). Для відновлення взаємодії з полем Хіггса потрібно в (3.99) замінити $v^2 \rightarrow (v + h)^2$.

Підсумуємо вище сказане. У результаті спонтанного порушення симетрії симетрія лагранжіана СМ $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ порушується до $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$ ¹, хігсівське поле набуває ненульового

¹Оскільки ми зафіксували калібрування групи $SU_W(2)$, обравши унітарне калібрування, то в подальшому робити $SU_W(2)$ перетворення вже не можна.

вакуумного значення, за рахунок якого виникає можливість отримання мас калібрувальними полями $\vec{V}_\mu$, B_μ , що входили до подовженої похідної від поля Хіггса (3.82). Безпосередній розрахунок показав, що поля V_μ^3 та B_μ не є полями у масовому базисі. У результаті переходу до масового базису було отримано безмасове електромагнітне поле A_μ (кванти поля — фотони, позначають γ) та масивні поля $W^\pm$, Z -бозонів.

Калібрувальне поле групи $SU_C(3)$ G_μ^a не входило до подовженої похідної від поля Хіггса (3.82), оскільки поле Хіггса є синглетним відносно групи $SU_C(3)$. Відповідно, калібрувальне поле G_μ^a , що описує сильну взаємодію, є безмасовим полем.

3.3 Маса полів матерії в СМ

Щоб отримати маси полів лептонів та кварків, потрібно розглянути лагранжіан, котрий містить взаємодію поля Хіггса з ферміонами

$$\mathcal{L}_{int} = - \left(Y_{mn}^l \bar{L}_m H E_n + Y_{mn}^d \bar{Q}_m H D_n + Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n + h.c. \right), \quad (3.101)$$

та підставити у нього поле Хіггса в унітарному калібруванні (3.80), тобто коли

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = i\sigma^2 H^* = \begin{pmatrix} \frac{v+h}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(Y_{mn}^l \bar{e}_{L_m} e_{R_n} + Y_{mn}^d \bar{d}_{L_m} d_{R_n} + Y_{mn}^u \bar{u}_{L_m} u_{R_n} + h.c. \right) - \\ & -\frac{h}{\sqrt{2}} \left(Y_{mn}^l \bar{e}_{L_m} e_{R_n} + Y_{mn}^d \bar{d}_{L_m} d_{R_n} + Y_{mn}^u \bar{u}_{L_m} u_{R_n} + h.c. \right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

де в першому рядку знаходяться масові доданки ферміонів, а в другому — взаємодія ферміонів з полем Хіггса. Звертаємо увагу: до масивних доданків не ввійшло поле нейтрино, отже, у СМ нейтрино є безмасовими частинками. Нейтрино також не взаємодіють із полем Хіггса h .

Перед тим яким рухатися далі нагадаємо, що довільна комплексна матриця M може бути діагоналізована за допомогою біунітарних перетворень [10]. Тобто завжди можна підібрати такі унітарні матриці U

та V , щоб була справедлива рівність $U^+MV = m$, де m – діагональна матриця.

Отже щоб позбутися змішування в масових доданках ферміонів, слід перейти від калібрувального базису ферміонних полів до масового базису за допомогою унітарних перетворень ($U^+U = \hat{1}$)

$$\begin{aligned} e_{R_m} &= U_{mn}^{e_R} \tilde{e}_{R_n}, & d_{R_m} &= U_{mn}^{d_R} \tilde{d}_{R_n}, & u_{R_m} &= U_{mn}^{u_R} \tilde{u}_{R_n}, \\ e_{L_m} &= U_{mn}^{e_L} \tilde{e}_{L_n}, & d_{L_m} &= U_{mn}^{d_L} \tilde{d}_{L_n}, & u_{L_m} &= U_{mn}^{u_L} \tilde{u}_{L_n}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

у якому матриці змішування U можна обрати такими, щоб елементи матриці Юкави

$$\tilde{Y}^l = (U^{e_L})^+ Y^l U^{e_R}, \quad \tilde{Y}^d = (U^{d_L})^+ Y^d U^{d_R}, \quad \tilde{Y}^u = (U^{u_L})^+ Y^u U^{u_R}, \quad (3.105)$$

стали діагональними і дійсними. Тоді маси ферміонів визначатимуться елементами відповідної діагональної матриці Юкави

$$m_{e_n} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tilde{Y}_{nn}^l; \quad m_{d_n} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tilde{Y}_{nn}^d; \quad m_{u_n} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tilde{Y}_{nn}^u, \quad (3.106)$$

і масові доданки лагранжіану ферміонних полів отримають вигляд

$$\mathcal{L}_{mass}^{free} = -m_{u_n} \tilde{u}_n \tilde{u}_n - m_{d_n} \tilde{d}_n \tilde{d}_n - m_{e_n} \tilde{e}_n \tilde{e}_n, \quad (3.107)$$

де ми врахували, що функції $f_n = f_{R_n} + f_{L_n}$ відповідають фізичним полям лептонів та кварків. Функції $\tilde{u}_n, \tilde{d}_n, \tilde{e}_n$ є лептонними та кварковими станами в масовому базисі, а саме: $\tilde{u}_n$ відповідає u, c, t кварковим полям, $\tilde{d}_n$ відповідає d, s, b кварковим полям, $\tilde{e}_n$ відповідає лептонним полям, відповідно до $n = 1, 2, 3$. Слід відзначити, що в СМ немає потреби вводити для полів нейтрино матрицю змішування, бо вони не мають масових доданків.

4 Ефективний потенціал поля Хіггса

До цього моменту ми розглянули спонтанне порушення симетрії та механізм Хіггса в класичній теорії, або без врахування радіаційних поправок до потенціалу Хіггса. Саме врахування радіаційних поправок до потенціалу Хіггса дозволить нам в подальшому розглянути питання стабільності вакууму СМ [11,12], .

Розглянемо поки нейтральне скалярне поле, яке не взаємодіє з іншими полями. Квантові поправки до його потенціалу $U(\varphi)$ будуть надходити з петльових діаграм на Рис.4.

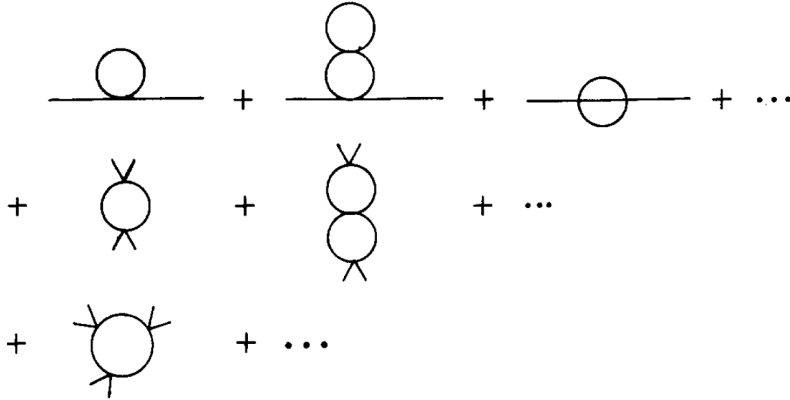


Рис. 4: Квантові поправки до класичного потенціалу скалярного поля зі взаємодією типу φ^4 . Рис. взято з [11].

Нескінченні доданки, що виникатимуть при розрахунку петльових діаграм модифікують стартовий лагранжіан [13] скалярного поля та потенціал скалярного поля. Розрахунки в однопетльовому наближенні [11] показують, що

$$V(\varphi_c) = U(\varphi_c) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 + \frac{U''(\varphi_c)}{k^2} \right], \quad (4.108)$$

де $V(\varphi_c)$ – ефективний потенціал, $U(\varphi_c)$ – стартовий потенціал, φ_c – класичне скалярне поле (вакуумне середнє поля $\varphi_c = \langle 0|\varphi|0\rangle$). Наведений інтеграл є розбіжним, якщо його регуляризувати обрізанням та покласти верхню межу інтегрування $k^2 = \Lambda^2$, отримаємо

$$V(\varphi_c) = U(\varphi_c) + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} U'' + \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{U''}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (4.109)$$

плюс константа, яку можна прибрати перевизначенням потенціалу.

Згідно з теоремою Боголюбова-Парасюка [13] нескінченні поправки від петльових діаграм (локальні контрчлени) додаються до стартового лагранжіану, модифікують коефіцієнти стартового лагранжіану та повинні повторювати структуру стартового лагранжіану. В нашому випадку, нескінченні поправки мають вигляд

$$\frac{\Lambda^2}{32\pi^2} U'' + \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \ln \frac{U''}{\Lambda^2}. \quad (4.110)$$

Тобто якщо стартовий потенціал містить доданки у вигляді поліному до φ^4 включно, то U'' також буде містити поліном максимального ступеня φ^4 . Якщо ж стартовий потенціал міститиме доданки у вигляді поліному вище 4 ступеня, то така теорія буде неперенормовною.

Для потенціалу типу (2.10) ми отримаємо такий вираз для ефективного потенціалу

$$\begin{aligned} V(\varphi_c) &= \frac{m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} (m^2 + 3\lambda \varphi_c^2) + \\ &\quad + \frac{(m^2 + 3\lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m^2 + 3\lambda \varphi_c^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{(m^2 + 3\lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda \varphi_c^2}{\Lambda^2} + a\varphi_c^2 + b\varphi_c^4, \end{aligned} \quad (4.111)$$

де коефіцієнти a, b є нескінченними та містять в собі нескінченний параметр Λ . Коефіцієнти a, b модифікують величини m^2, λ в результаті застосування процедури перенормування. Процедуру перенормування можна провести декількома способами.

Перший підхід. Ідея полягає в тому, що стартові параметри лагранжіану m, λ є не фізичними. Радіаційні нескінченні петльові поправки, додані до потенціалу, перетворюють стартові параметри на фізичні параметри лагранжіану m_R, λ_R .

Фізичне значення масового параметра за визначенням є

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = m_R^2. \quad (4.112)$$

Фізичне значення параметр самодії ϵ

$$\left. \frac{\partial^4 V}{\partial \varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0} = 6\lambda_R^2. \quad (4.113)$$

Явні вирази (4.112), (4.113) для потенціалу (4.111) є досить складними, але вони нам не потрібні. Ми шукатимемо додатковий мінімум поля Хіггса, який може себе проявити при дуже великих значеннях поля φ_c . В цьому випадку домінуючим буде доданок з φ_c^4 і можна одразу покласти $m = 0$. Тому розглянемо ефективний потенціал для безмасової теорії скалярного поля у вигляді

$$V(\varphi_c) = \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{9\lambda^2 \varphi_c^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\Lambda^2} + a\varphi_c^2 + b\varphi_c^4. \quad (4.114)$$

Тоді

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = 2a = 0. \quad (4.115)$$

Оскільки $\frac{\partial^4 V}{\partial \varphi_c^4}$ в точці $\varphi_c = 0$ дорівнює нескінченності, параметр самодії визначимо в іншій точці, наприклад в $\varphi_c = M$ (M – довільна величина розмірності маси)

$$\left. \frac{\partial^4 V}{\partial \varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=M} = 6\lambda_R^2 = 6\lambda + 24b + \frac{9\lambda^2}{64\pi^2} \left(100 + 24 \ln \frac{M^2}{\Lambda^2} \right). \quad (4.116)$$

Підставивши $a = 0$ та b з (4.116) у ефективний потенціал (4.114), отримаємо

$$V(\varphi_c) = \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{9\lambda^2 \varphi_c^4}{64\pi^2} \left(\ln \left[\frac{\varphi_c^2}{M^2} \right] - \frac{25}{6} \right). \quad (4.117)$$

Як бачимо, отримали вираз, у який входять нефізичний параметр стартового лагранжіану λ та фізичний параметр λ_R , що вимірюється при значенні $\varphi_c = M$. Щоб уникнути цього використаємо наступний прийом. Припустимо, що ми виразили фізичний параметр λ_R через ряд по λ . Тоді в першому порядку по сталій λ матимемо $\lambda_R = \lambda + O(\lambda^2)$. Підвівши останній вираз до квадрату отримаємо

зв'язок в другому порядку $\lambda_R^2 = \lambda^2 + O(\lambda^3)$. Використавши це, ми можемо переписати ефективний потенціал (4.117) лише через λ_R , див. також [14]:

$$V(\varphi_c) = \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{9\lambda_R^2 \varphi_c^4}{64\pi^2} \left(\ln \left[\frac{\varphi_c^2}{M^2} \right] - \frac{25}{6} \right). \quad (4.118)$$

Звідки випливає існування екстремуму потенціалу, $\partial V(\varphi_c)/\partial \varphi_c = 0$, у ще одній точці, окрім $\varphi_c = 0$.

Другий підхід. Ідея підходу полягає в тому, що ми записуємо лагранжіан через фізичні параметри m_R , λ_R , які беруться експериментально на певному масштабі енергій μ . При цьому до лагранжіану штучно додають контрчлени, що відтворюють структуру лагранжіану. Їх мета залишити незмінними значення m_R , λ_R від впливу радіаційних поправок. Отже, запишемо потенціал з радіаційними поправками у вигляді [12]

$$V(\varphi_c) = \frac{m_R^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} (m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2) + \frac{(m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\delta m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\delta \lambda}{4} \varphi_c^4 + \delta \Omega. \quad (4.119)$$

Накладемо умову, щоб в точці $m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2 = \mu^2$ даний потенціал мав вигляд класичний вигляд без радіаційних поправок

$$V(\varphi_c) = \frac{m_R^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4. \quad (4.120)$$

Тоді перенормований потенціал на довільному масштабі потенціал не має містити нескінченний параметр регуляризації Λ та має зводитися до виразу (4.120) при $m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2 = \mu^2$. Не складно вгадати його вигляд

$$V(\varphi_c) = \frac{m_R^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{(m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2}{\mu^2}. \quad (4.121)$$

Отже, фізичний потенціал має задовільняти умовам

$$V(\varphi_c)|_{\varphi_c=0} = \frac{m_R^4}{64\pi^2} \ln \frac{m_R^2}{\mu^2}, \quad (4.122)$$

$$\left. \frac{d^2 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = m_R^2 + 12\lambda m_R^2 \frac{\ln \frac{m_R^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}}{64\pi^2}, \quad (4.123)$$

$$\left. \frac{d^4 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0} = 6\lambda_R + 108\lambda_R^2 \frac{3 + 2 \ln \frac{m^2}{\mu^2}}{64\pi^2}. \quad (4.124)$$

Наступним кроком потрібно знайти значення $V(\varphi_c)|_{\varphi_c=0}$, а також $\left. \frac{d^2 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0}$ та $\left. \frac{d^4 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0}$ для потенціалу (4.119), прирівняти отримані вирази до (4.122) – (4.124) та розв'язати отриману систему рівнянь відносно δm , $\delta \lambda$ та $\delta \Omega$. Підставивши отримані значення δm , $\delta \lambda$ та $\delta \Omega$ в потенціал (4.119) можна переконатися, що ми справді отримаємо потенціал у вигляді (4.121).

4.1 Узагальнення за наявності додаткових полів

За наявності в лагранжіані додаткових полів, що взаємодіють зі скалярним полем Хіггса, петльові діаграми, які визначатимуть ефективний потенціал скалярного поля Хіггса, будуть також містити лінії додаткових полів. Відповідно, наявність додаткових полів у лагранжіані змінюватиме ефективний потенціал поля Хіггса.

Розглянемо ситуацію, коли існує декілька скалярних полів, але лише одне з них має ненульове вакуумне середнє. Потенціал скалярних полів запишемо як

$$\begin{aligned} V(|\phi|^2) &= -\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda [\Phi^+ \Phi]^2 = \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_N^2) + \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_N^2)^2, \end{aligned} \quad (4.125)$$

де $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$.

Радіаційні поправки до даного потенціалу визначаються (4.109) з діагональними другими похідними $U''_{\varphi_i, \varphi_i}$, де треба провести підсумовування за всіма скалярними полями, а другі похідні беруться в точці $\Phi_C = (0, 0, \dots, \varphi_c)$ [11, 12, 15, 16]. Оскільки

$$U''_{\varphi_N, \varphi_N} |_{\Phi_c} = -\mu^2 + 3\lambda \varphi_c^2, \quad U''_{\varphi_i, \varphi_i} |_{\Phi_c} = -\mu^2 + \lambda \varphi_c^2, \quad i \neq N, \quad (4.126)$$

тому радіаційна поправка до потенціалу (після перенормування) від скалярних полів матиме вигляд, див. (4.121),

$$V_{scal} = \frac{(m^2 + 3\lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda\varphi_c^2}{\mu^2} + (N-1) \frac{(m^2 + \lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + \lambda\varphi_c^2}{\mu^2}. \quad (4.127)$$

Поправка до ефективного потенціалу від внеску векторних полів з масою $m_V = g_v\varphi_c$ [12]:

$$V_{vec} = \frac{3(g_v\varphi_c)^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (4.128)$$

де фактор 3 з'явився в результаті згортки $g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu} - k_\nu k_\mu/k^2)$. Безмасові векторні поля не дають внеску в ефективний потенціал.

Поправка до ефективного потенціалу від внеску ферміонних полів з масою $m_f = g_f\varphi_c$ буде від'ємною, оскільки петля з ферміонних ліній має додатковий знак мінус у порівнянні з петлею з бозонних ліній [12]:

$$V_{ferm} = -\frac{4(g_f\varphi_c)^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (4.129)$$

де 4 виникла внаслідок згортки одиничної матриці 4×4 з простору γ мариць.

Таким чином, врахувавши всі можливі поправки до ефективного потенціалу поля Хіггса, отримаємо

$$V_{eff} = \frac{m^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi_c^4 + \frac{B\varphi_c^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} + \frac{(m^2 + 3\lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda\varphi_c^2}{\mu^2} + (N-1) \frac{(m^2 + \lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + \lambda\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (4.130)$$

де $B = 3\sum_v g_v^2 - 4\sum_f g_f^2$.

4.2 Ефективний потенціал поля Хіггса в СМ

Запишемо ефективний потенціал скалярного поля Хіггса для випадку Стандартної моделі. В СМ присутні 4 скалярні поля (масивне

поле Хіггса h , та три безмасові голдстоунівські бозони φ^+ , φ^- , φ_z), тобто $N = 4$. В СМ присутні одне безмасове векторне поле (фотони) – не дає внеску в ефективний потенціал, та три масивні векторні поля: поле W^- та W^+ бозонів з масою $M_W = gv/2$ та сталою $g_W = g/2$, поле Z бозонів з масою $M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}v/2$ та сталою $g_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}/2$. В СМ присутні ферміонні поля матерії, але їх внесок пропорційний g_f^4 , де $g_f = m_f/v$. Оскільки залежність 4-го ступеня, то можна врахувати лише внесок найважчого ферміона, тобто top кварка. Оскільки маса top кварка $m_t = Y_t v/\sqrt{2}$, то $g_t = Y_t/\sqrt{2}$, де Y_t – юкавівська стала для top кварка. Внаслідок того, що top кварк може мати три можливих кольори, це дає додатковий множник 3.

Врахувавши все сказане, можна записати ефективний потенціал скалярного поля Хіггса для випадку СМ у вигляді [11, 12]:

$$V_{eff}^{SM} = \frac{m^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi_c^4 + 3\frac{2g^4 + (g^2 + g'^2)^2}{1024\pi^2}\varphi_c^4 \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} - 3\frac{Y_t^4}{64\pi^2}\varphi_c^4 \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} + \frac{(m^2 + 3\lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda\varphi_c^2}{\mu^2} + 3\frac{(m^2 + \lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + \lambda\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (4.131)$$

4.3 Покращений запис ефективного потенціалу поля Хіггса методом теорії ренормгрупи

Як буде показано далі, ефективний потенціал може мати другий мінімум при дуже великих значеннях скалярного поля φ_c . Для цього треба враховувати вищі порядки теорії збурень та враховувати діаграми з більшою кількістю петель. Внесок від n -петльової діаграми пропорційний $g_i^{n+1} \ln^n \frac{\varphi_c^2}{\mu^2}$, де μ – масштаб енергій, на якому розглядається ефективний потенціал, g_i – сталі зв'язку лагранжіану. Відповідно для застосовності теорії збурень вимагається не лише малість сталих зв'язку $g_i < 1$, а й малість величини $g_i \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} < 1$. Для будь-якого фіксованого значення φ_c можна обрати значення μ , для якого ці умови виконуються. Але для того, щоб проаналізувати теорію на проміжку значень полів від $\varphi_{c,1}$ до $\varphi_{c,2}$ має виконуватися умова $g_i \ln \frac{\varphi_{c,2}^2}{\varphi_{c,1}^2} < 1$, що не виконуватиметься для нашої задачі.

Коректний підхід до запису ефективного потенціалу на великих масштабах полів (енергій) базується на застосуванні ренормалізаційної групи [12, 17].

Ідея підходу ренормалізаційної групи полягає в тому, що повна функція ефективного потенціалу не має змінюватися при зміні масштабу енергій:

$$\frac{\partial dV}{d\mu} = 0, \quad (4.132)$$

що призводить до рівняння Каллана-Сіманчика

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} + m^2 \gamma_m \frac{\partial}{\partial m^2} + \varphi_c \gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_c} \right) V_{eff} = 0, \quad (4.133)$$

де

$$\beta_{g_i} = \mu \frac{dm^2(\mu)}{d\mu}, \quad \gamma \varphi_c(\mu) = \mu \frac{d\varphi_c(\mu)}{d\mu}, \quad \gamma_m m^2(\mu) = \mu \frac{dm^2(\mu)}{d\mu}. \quad (4.134)$$

Диференційні рівняння ренормалізаційної групи є абсолютно точними. Відповідно, знаючи значення величин β , γ_m , γ і значення ефективного потенціалу в точці $\varphi_{c,1}$ можна знайти точне значення ефективного потенціалу в будь якій точці $\varphi_{c,2}$. На практиці ж значення величин β , γ_m , γ відомо у вигляді перших доданків ряду за сталою зв'язку g_i і, відповідно, розв'язок рівняння Каллана-Сіманчика буде наближеним, але умовою його застосування буде $g_i < 1$, а не $g_i \ln \frac{\varphi_{c,2}^2}{\varphi_{c,1}^2} < 1$, що значно розширює масштаб енергій, на яку можна використовувати покращений ефективний потенціал скалярного поля.

Використавши відомі функції β , γ_m , γ та розв'язавши рівняння Каллана-Сіманчика отримаємо

$$V_{eff}^{SM} = \frac{m^2(t)}{2} G^2(t) \varphi_c^2 + \frac{\lambda(t)}{4} G^4(t) \varphi_c^4, \quad (4.135)$$

де $t = \ln \varphi_c / mu$, а $m(t)$, $\lambda(t)$ та $G(t)$ – відомі функції, що отримуються чисельними розрахунками [12]. Результатом розрахунків є те, що при масштабі $\mu \sim 10^{11}$ GeV параметр λ стає від'ємним, а ефективний потенціал Хіггса отримує другий мінімум при $\varphi_c \sim 10^{30}$ GeV, див. Рис.5.

Відповідно, надзвичайно важливим стає питання стабільності вакууму відносно другого мініму потенціалу поля Хіггса. Справа в тому, що якщо відомий нам мінімум потенціалу поля Хіггса в околі точки $\varphi_c = 246$ GeV не такий глибокий, як мінімум в околі точки $\varphi_c = 10^{30}$

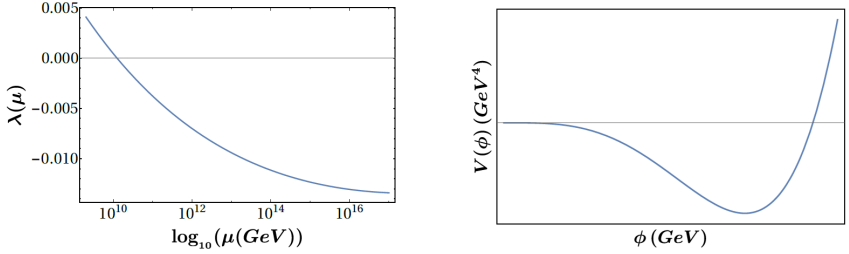


Рис. 5: На лівому малюнку схематично продемонстровано поведінку сталої взаємодії λ . Показано, що при $\mu \sim 10^{11}$ GeV стала λ стає від'ємною. На правому рисунку схематично показано поведінку ефективного потенціалу поля Хіггса та наявність другого мінімуму в точці $\varphi_c \sim 10^{30}$ GeV. Рис. взято з [12].

GeV, то за рахунок тунельного ефекту з часом система перейде стан більш глибокого мініму потенціалу. В цьому випадку стан системи в околі точки мінімуму $\varphi_c = 246$ GeV називається *метастабільним станом*, а відповідний вакуумний стан називається *хибним вакуумом*. Вакуумний же стан в точці більш глибокого мінімуму в околі точки $\varphi_c = 10^{30}$ GeV називається *справжнім вакуумом*, див. Рис.6. Перехід зі стану хибного вакууму у стан справжнього вакууму називається розпадом хибного вакууму. Ширина розпаду визначається як $\Gamma = Ae^{-B}$, де A , B були розраховані в [18, 19]. Процес розпаду хибного вакууму відбувається через механізм зародження бульбашок зі справжнім вакуумом за рахунок інстантонних ефектів. Якщо радіус такої бульбашки стане більшим за певний критичний радіус, вона вибухово почне зростати в розмірах зі швидкістю світла, якщо радіус буде меншим за критичний радіус, то така бульбашка буде зменшуватися та зникне [20–23]. Оскільки маси ферміонних полів, бозонів слабкої взаємодії, поля Хіггса, а також стала Фермі та юкавівська взаємодія визначаються вакуумним середнім поля Хіггса, то перехід поля Хіггса в нову точку мінімуму потенціалу матиме величезний вплив для нашого Всесвіту.

Відповідно ключовими є наступні питання. Якого типу вакуум, хибний чи справжній, визначає потенціал Хіггса в околі точки *електро-слабкого мінімуму* $\varphi_c = 246$ GeV? Якщо стан вакууму поля Хіггса в

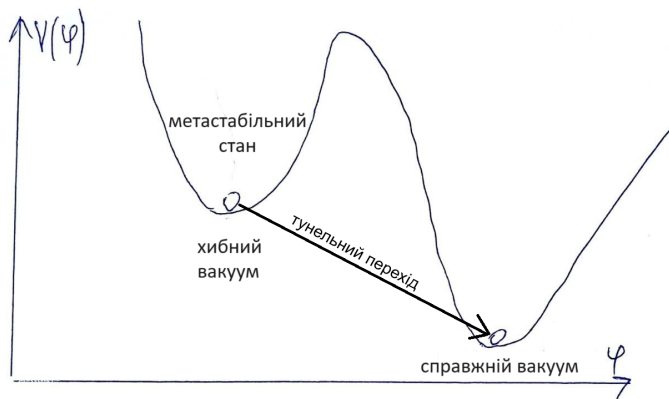


Рис. 6: Ілюстрація положення хибного та справжнього вакууму для схематичного потенціалу поля Хіггса.

околі точки $\varphi_c = 246$ GeV є метастабільним, то яким буде час його розпаду?

5 Стабільність електрослабкого вакууму поля Хіггса в СМ

Як виявилось, відповідь на питання стабільності вакууму поля Хіггса в СМ дуже чутлива до точних значень маси бозона Хіггса m_H та маси t -кварка m_t .

В залежності від значення потенціалу Хіггса в точці другого мінімуму $V_{eff}(\varphi_{min})$ З самих загальних міркувань розрізняють три можливі області параметрів в площині (m_H, m_t) :

- Мінімум потенціалу поля Хіггса в точці $\nu = 246$ GeV є глибшим в порівнянні зі значенням в точці другого мінімуму $V_{eff}(\varphi_{min}) > V_{eff}(\nu)$. Цей випадок називають *областю абсолютної стабільності*.
- Мінімум потенціалу поля Хіггса в точці другого мінімуму є глибшим в порівнянні зі значенням потенціалу в точці $\nu = 246$ GeV

$V_{eff}(\varphi_{min}) < V_{eff}(\nu)$. Час перебування в стані з мінімумом в точці $\nu = 246$ GeV є більшим за час життя Всесвіту $\tau > T_U$. Цей випадок називають *областю метастабільного стану*.

- Мінімум потенціалу поля Хіггса в точці другого мінімуму є глибшим в порівнянні зі значенням потенціалу в точці $\nu = 246$ GeV $V_{eff}(\varphi_{min}) < V_{eff}(\nu)$. Час перебування в стані з мінімумом в точці $\nu = 246$ GeV є меншим за час життя Всесвіту $\tau < T_U$. Цей випадок називають *областю нестабільності*.

Результат аналізу стабільності вакууму поля Хіггса в околі точки електрослабкого мінімуму $\nu = 246$ GeV представлений в [24] та на Рис.7. Лінія між областями стабільності та метастабільності визначається умовою $V_{eff}(\varphi_{min}) = V_{eff}(\nu)$. Лінія між областями нестабільності та метастабільності визначається умовою $\tau = T_U$. Відомі на час значення (m_H, m_t) , а саме

$$m_H^{exp} = 125.7 \pm 0.25 \text{ GeV}, \quad m_t^{exp} = 173.34 \pm 1.3 \text{ GeV}$$

вказують на те, що вакуум поля Хіггса знаходиться в метастабільному стані ближче до області абсолютної стабільності.

Отриманий результат був отриманий без врахування гравітаційних ефектів у Всесвіті. Врахування гравітаційної взаємодії має стабілізаційний ефект, що призводить до збільшення асу життя Всесвіту. Зокрема, розрахунок часу життя електрослабкого вакууму в СМ у плоскому просторі-часі (без урахування гравітаційних ефектів) дає $\tau = e^{639} T_U$. Розрахунок часу життя з урахуванням гравітаційних ефектів дає $\tau = e^{661} T_U$ [12].

Величезне значення часу життя електрослабкого вакууму в рамках СМ звичайно не може не радувати. З іншої точки зору слід звернути увагу на дивовижно гарне значення спостережуваних параметрів (тут має місце тонке налаштування, *fine-tuning*) (m_H, m_t) , оскільки незначне відхилення від існуючого значення могло б привести до того, що Всесвіт у нинішньому стані не зміг би довго існувати. Аби перехід вакууму з хибного (електрослабкого) стану в справжній стан справді б відбувся, це б призвело до величезного вивільнення енергії у Всесвіті (справжній вакуумний стан має нижчу енергію) та до зміни значення мас всіх елементарних частинок! Це б мало катастрофічне значення для нашого існування.

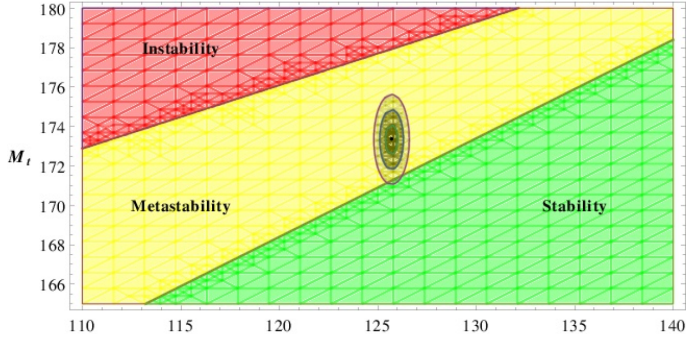


Рис. 7: Области стабільності вакууму поля Хіггса в околі точки електрослабкого мінімуму $\nu = 246$ GeV [24] в площині (m_H, m_t) . Відомі на час значення (m_H, m_t) вказують на те, що вакуум поля Хіггса знаходиться в метастабільному стані ближче до області абсолютної стабільності.

6 Вплив нової фізики на стабільність електрослабкого вакууму поля Хіггса

По-перше, з аналізу Рис.7 та формули (4.131) випливає, що аби існувала ферміонна частинка з масою більшою за масу t -кварка (наприклад, новий лептонний та кварковий дублет, щоб не суперечити вимозі скорчення кіральної аномалії в СМ), а маса бозона Хіггса залишалася б сталою, то точка на діаграмі (m_H, m_t) піднялася б угору в область нестабільності. Тобто навіть незначна зміна лагранжіану СМ насправді сильно впливає на положення точки на діаграмі (m_H, m_t) та на час життя електрослабкого вакууму.

По-друге, на час електрослабкого вакууму також впливатиме нова фізика на великих масштабах. Розглянемо це детальніше.

Вплив операторів вищих розмірностей

Як вже зазначалося, при великих енергіях (великих значеннях поля Хіггса), квадратичним доданком поля Хіггса можна знехтувати і потенціал набуває простого вигляду

$$V_{SM}(\varphi) = \frac{\lambda_{SM}(\varphi)}{4} \varphi^4. \quad (6.136)$$

За рахунок врахування радіаційних поправок та розв'язку рівняння ренормалізаційної групи параметр самої λ залежить від масштабу енергій та набуває вигляду [25]:

$$\lambda_{SM}(\varphi) = \lambda_* + \alpha \left(\ln \frac{\varphi}{M_{Pl}} \right)^2 + \beta \left(\ln \frac{\varphi}{M_{Pl}} \right)^4, \quad (6.137)$$

де $M_P = \sqrt{\hbar c/G} = 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ – маса Планка, $\lambda_* = -0.013$, $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 6.3 \cdot 10^{-8}$. Потенціал (6.136) веде себе так як предствлено на Рис.5 та перетинає нуль в точках $\varphi = 7.7 \cdot 10^{10} \text{ GeV}$ та $\varphi = 1.9 \cdot 10^{27} \text{ GeV}$. Саме для такого потенціалу були побудовані області стабільності електрослабкого вакууму на Рис.7.

Припустимо тепер, що існує нова фізика на великих масштабах енергій, а саме: існують нові важкі частинки, що взаємодіють з полем Хіггса. Тоді їх ефективна взаємодія буде схожа на 4-ферміонну взаємодію Фермі, але в нашому випадку характерним масштабом взаємодії можна обрати масштаб Планка. В результаті нашого припущення ми отримаємо додаткові оператори розмірності 6 та 8:

$$V_{NP}(\varphi) = \frac{\lambda_6}{6} \frac{\varphi^6}{M_P^2} + \frac{\lambda_8}{8} \frac{\varphi^8}{M_P^4}. \quad (6.138)$$

Очевидно, що у випадку, коли $\lambda_6 < 0$ та $\lambda_8 > 0$ вплив ефективного потенціалу буде призводити до зменшення часу життя електрослабкого вакууму.

В результаті ефективний потенціал набуде вигляду

$$V_{eff} = V_{SM} + V_{NP}(\varphi) = \frac{\varphi^4}{4} \left[\lambda_* + \alpha \ln^2 \frac{\varphi}{M_{Pl}} + \beta \ln^4 \frac{\varphi}{M_{Pl}} + \frac{2}{3} \lambda_6 \frac{\varphi^2}{M_P^2} + \frac{1}{2} \lambda_8 \frac{\varphi^4}{M_P^4} \right]. \quad (6.139)$$

Звичайно, значення параметрів λ_6 та λ_8 є невідомими, але виявляється, що час життя електрослабкого вакууму є дуже чутливим до числових значень цих параметрів ефективного потенціалу, див. Рис.9. Як можна побачити з таблиці, вплив гравітації завжди збільшує час життя електрослабкого вакууму, однак існують області значень $\lambda_6 < 0$

λ_6	λ_8	τ_{flat}/T_U	τ_{grav}/T_U
0	0	10^{639}	10^{661}
-0.05	0.1	10^{446}	10^{653}
-0.1	0.2	10^{317}	10^{598}
-0.15	0.25	10^{186}	10^{512}
-0.3	0.3	10^{-52}	10^{287}
-0.45	0.5	10^{-93}	10^{173}
-0.7	0.6	10^{-162}	10^{47}
-1.2	1.0	10^{-195}	10^{-58}
-1.7	1.5	10^{-206}	10^{-106}
-2.0	2.1	10^{-206}	10^{-121}

Рис. 8: Час життя електрослабкого вакууму в залежності від значень параметрів ефективного потенціалу λ_6 та λ_8 , що генеруються новою фізикою на великому масштабі енергій [12].

та $\lambda_8 > 0$, коли час життя вакууму навіть з урахуванням гравітаційних ефектів є настільки малим, що суперчить спостережуваним даним. Нагадаємо, що час життя Всесвіту $T_U \approx 13.8$ років $\approx 4.35 \cdot 10^{17}$ секунди.

Нові частинки великої маси

В якості прикладу нової фізики на великих масштабах наводять додатковий (модельний) до СМ лагранжіан з новими скалярним та ферміонним полями з масами порядку маси Планка, що взаємодіють з полем Хігса [26]:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{L} = & \frac{M_S^2}{2} S^2 + \frac{\lambda_S}{4} S^4 + 2g_S (H^\dagger \cdot H) S^2 \\
& + M_f (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \\
& + \sqrt{2}g_f (\bar{\Psi}_L \cdot H \psi_R + \bar{\psi}_R H^\dagger \cdot \Psi_L) , \quad (6.140)
\end{aligned}$$

де H – дублет поля Хігса, λ_S – стала взаємодії нового скалярного поля S , g_S – стала зв'язку між дублетом поля Хігса та скаляром S , ψ ($SU(2)$ синглет) діраковського поля ψ з масою M_f , Ψ_L – компонента

з лівою кіральністю $SU(2)$ ферміонного дублета $\Psi_L = (0, \psi_L)^T$, g_f – юкавівська стала між Ψ та дублетом поля Хіггса H .

В цьому випадку однопетльова поправка до ефективного потенціалу поля Хіггса матиме вигляд

$$V_1(\phi) = \frac{(M_S^2 + 2g_S\phi^2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M_S^2 + 2g_S\phi^2}{M_S^2} \right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{(M_f^2 + g_f^2\phi^2)^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M_f^2 + g_f^2\phi^2}{M_S^2} \right) - \frac{3}{2} \right], \quad (6.141)$$

де перенормування відбувається на масштабі $\mu = M_S$. Звертаємо увагу, що внесок від скалярного поля позитивний і має збільшувати час життя електрослабкого вакууму, а внесок від ферміонного поля призводить до зменшення часу життя електрослабкого вакууму.

Якщо параметри додаткового лагранжіану обрати у вигляді $M_S = 1.2 \cdot 10^{18}$ GeV, $M_f = 0.6 \cdot 10^{17}$ GeV, $g_S(M_S) = 0.97$, $g_f^2(M_S) = 0.48$, $\lambda_{SM}(M_S) = -0.0151$, то ефективний потенціал поля Хіггса матиме новий мінімум (нижче за електрослабкий мінімум) в точці $\phi_{min} \sim 0.4 \cdot 10^{19}$ GeV. Час життя електрослабкого вакууму в цьому випадку буде $\tau \sim 10^{180} T_U$.

Якщо ж в попередньому прикладі всі параметри залишити без змін, а лише змінити масу ферміона $M_f = 2.4 \cdot 10^{15}$ GeV, то отримаємо час життя електрослабкого вакууму $\tau \sim 10^{-65} T_U$, що звичайно суперечить даним спостережень.

Як бачимо час життя електрослабкого вакууму є дуже чутливим до нової фізики на різних енергетичних масштабах.

7 Вплив взаємодії поля Хіггса з кривиною простору-часу

В загальному випадку можна несуперечливим чином ввести взаємодію скалярного поля з кривиною простору-часу [27,28]. Лагранжіан скалярного поля, що взаємодіє з кривиною простору-часу матиме вигляд

$$\mathcal{L} = D^\mu \Psi^\dagger D_\mu \Psi - (m^2 + \xi R) \Psi^\dagger \Psi,$$

генерує рівняння руху

$$\{D_\mu D^\mu + (m^2 + \xi R(\mathbf{x}))\} \psi_\lambda(\mathbf{x}) = 0 \quad (7.142)$$

та визначає тензор енергії-імпульсу у вигляді

$$T^{\mu\nu} = (D^\mu \Psi)^\dagger D^\nu \Psi + (D^\nu \Psi)^\dagger D^\mu \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \\ + \xi (g^{\mu\nu} D^\rho D_\rho - D^\mu D^\nu - R^{\mu\nu}) \Psi^\dagger \Psi, \quad (7.143)$$

де $R^{\mu\nu}$ – тензор Річчі, $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ – скалярна кривина простору-часу, ξ – стала зв'язку скалярного поля з кривиною простору-часу.

Цікавим є те, що якщо у виразі для тензора енергії-імпульсу покласти $R = 0$ (випадок плоского простору-часу), то залежність густини енергії скалярного поля (компонента T^{00}) від параметра ξ залишиться. Тобто для випадку плоского простору часу ξ виступає певним довільним параметром, що може змінювати густину енергії скалярного поля [29]! Єдиним виділенням з фізичної точки зору випадком є значення $\xi_c = (d-1)/(4d)$, де d – просторова розмірність. В цьому випадку модель скалярного поля є конформно інваріантною. Для нашого випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу $d = 3$, отже $\xi_c = 1/6$.

Розглянемо вплив сталої зв'язку скалярного поля з кривиною простору-часу на час життя електрослабкого вакууму [30]. Виявляється, що в рамках СМ додавання до лагранжіану доданку $-\xi H^+ H$ практично не впливає на час життя електрослабкого вакууму, але цей доданок має величезне стабілізуюче значення у випадку модифікації лагранжіану СМ.

Наприклад, при додаванні до ефективного потенціалу поля Хіггса операторів вищої розмірності (6.139) з параметрами $\lambda_6 = -1.2$, $\lambda_8 = 1$ матимемо, згідно з Рис.9, надзвичайно малий час життя електрослабкого вакууму $\tau = 10^{-58} T_U$. Якщо ж до даної моделі додати в лагранжіан доданок $-\xi H^+ H$, отримаємо час життя електрослабкого вакууму в залежності від значення параметра ξ , що представлений на Рис.9. Як можна побачити, при $|\xi| > 1$ час життя електрослабкого вакууму стабілізується і приблизно відповідає часу життя, що розраховується в рамках СМ.

ξ	τ_{SM}	τ_{NP}
-15	10^{736}	10^{736}
-10	10^{726}	10^{726}
-5	10^{710}	10^{710}
-1	10^{684}	10^{680}
-0.5	10^{677}	10^{600}
-0.3	10^{672}	10^{358}
-0.1	10^{666}	10^{65}
0	10^{661}	10^{-58}

ξ	τ_{SM}	τ_{NP}
0.3	10^{660}	10^{-167}
0.5	10^{668}	10^{23}
0.7	10^{674}	10^{346}
0.8	10^{676}	10^{512}
1	10^{679}	10^{666}
5	10^{709}	10^{709}
10	10^{725}	10^{725}
15	10^{735}	10^{735}

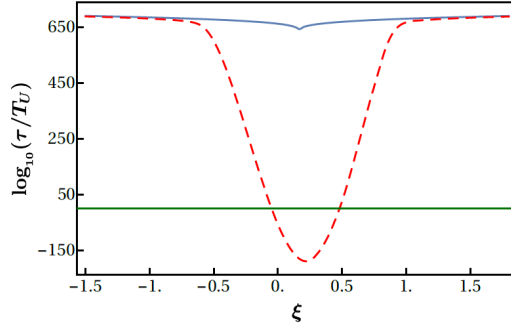


Рис. 9: Час життя електрослабкого вакууму для значень параметрів ефективного потенціалу $\lambda_6 = -1.2$ та $\lambda_8 = 1$, що генеруються новою фізикою на великому масштабі енергій, в залежності від значення стала зв'язку скалярного поля з кривиною простору-часу. На нижньому малюнку горизонтальна лінія визначає значення при якому $\tau = T_U$. Рис. взято з [12].

ЛІТЕРАТУРА

1. Peter W. Higgs, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
2. Peter W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156, 1966.
3. F. Englert, R. Brout, *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
4. G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, *Global conservation laws and massless particles*, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
5. T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1984.
6. J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
7. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* – Cambridge University Press, 1996.
8. D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot big bang theory* – Singapore: World Scientific, 2017.
9. В. Горкавенко, *Стандартна модель фізики елементарних частинок та її розширення*, 2022,
<https://qft.knu.ua/wp-content/uploads/2022/10/SM-2022.pdf>.
10. G. Landi, A. Zampini, *Linear Algebra and Analytic Geometry for Physical Sciences* – Springer, 2018. - 345 p.
11. M. Sher, *Electroweak Higgs potentials and vacuum stability*, Phys. Rept. **179**, 273 (1989).
12. F. Contino, *Impact of new physics beyond the Standard Model on the stability of the electroweak vacuum*, Doctoral Thesis, University of Catania, Italy (2023).
13. D.V. Shirkov and N.N. Bogoliubov, *Quantum fields* – Hardcover, 1983.

14. B. Delamotte, *A hint of renormalization*, Am.J.Phys. **72** (2004) 170-184, arXiv:hep-th/0212049.
15. M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* – CRC Press, 1995. - 866 p.
16. S. Coleman, E. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
17. S.Y. Lee and Alain M. Siaccaluga, *Evaluation of Higher Order Effective Potentials with Dimensional Regularization*. Nucl. Phys. B **96**, 435 (1975).
18. Sidney R. Coleman. *The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory*, Phys. Rev. D **15**, 2929, (1977). [Erratum: Phys. Rev. D **16**, 1248 (1977)].
19. Curtis G. Callan, Jr. and Sidney R. Coleman, *The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections*, Phys. Rev. D **16**, 1762, 1977.
20. M. Stone, *Lifetime and decay of excited vacuum states*, Phys. Rev. D. **14**, 3568 (1976).
21. P.H. Frampton, *Vacuum Instability and Higgs Scalar Mass*, Phys. Rev. Let. **37**, 1378 (1976).
22. M. Stone, *Semiclassical methods for unstable states*, Phys. Lett. B. **67**, 186 (1977).
23. P.H. Frampton, *Consequences of Vacuum Instability in Quantum Field Theory*, Phys. Rev. D. **15**, 2922 (1977).
24. V. Branchina and E. Messina, *Stability, Higgs Boson Mass and New Physics*, Phys. Rev. Lett., **111**, 241801, **2013**.
25. P. Burda, R. Gregory, and I. Moss, *The fate of the Higgs vacuum*, JHEP **06**, 025, (2016).
26. V. Branchina and E. Messina, *Stability and UV completion of the Standard Model*, Europhysics Letters **117**, 61002 (2017).

27. C.G. Callan, S. Coleman, R. Jackiw, *A New improved energy-momentum tensor*, Annals Phys. **59**, 42 (1970).
28. N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* – Cambridge University Press, 1982.
29. Yu.A. Sitenko, V.M. Gorkavenko, *Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of a (d-2)-brane in (d+1)-dimensional space-time*, Phys. Rev. D **67**, 085015 (2003).
30. V. Branchina, E. Bentivegna, F. Contino, and D. Zappalà, *Direct Higgs-gravity interaction and stability of our Universe*, Phys. Rev. D **99**, 096029 (2019).