

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Горкавенко Володимир Миколайович

Стандартна Модель фізики елементарних
частинок та її розширення

Навчальний посібник для студентів фізичного факультету

Київ – 2026

Навчальний посібник для студентів фізичного факультету / Стандартна Модель фізики елементарних частинок та її розширення / В.М. Горкавенко — Київ, 2026. — 355 с.

Рецензенти: К.В. Бондаренко, доктор філософії (Ph.D.), науковий співробітник факультету математики та природничих наук Лейденського університету, Нідерланди

А.В. Рудаковський, кандидат фіз.-мат. наук, науковий співробітник відділу астрофізики та елементарних частинок Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

Затверджено
вченою радою
фізичного факультету
25 червня 2026 року

Стандартна Модель фізики
елементарних частинок та її
розширення / В.М. Горкавенко

Навчальний посібник присвячено основам Стандартної Моделі фізики елементарних частинок та основним напрямам її можливого розширення. Послідовно розглянуто принцип локальної калібрувальної інваріантності, спонтанне порушення симетрії та механізм Хіггса, на основі яких побудовано лагранжіан Стандартної Моделі. Розглянуто властивості та симетрії Стандартної Моделі, а також основні проблеми СМ. Окремо розглянуто можливі розширення Стандартної Моделі, зокрема скалярне, нейтринне, векторне, псевдоскалярне та зі взаємодією типу Черна–Саймонса, а також теорії великого об'єднання. Навчальний посібник призначений для студентів фізичного факультету, які вивчають квантову теорію поля та фізику високих енергій.

ЗМІСТ

Вступ	6
Позначення	8
Розділ 1 Передумови та історія створення СМ	15
Розділ 2 Принцип локальної калібрувальної інваріантності	27
2.1 Група $U(1)$	29
2.2 Теоретико-груповий підхід для опису калібрувальної інваріантності. Фундаментальне представлення	33
2.3 Теоретико-груповий підхід для опису калібрувальної інваріантності. Приєднане представлення	41
2.4 Калібрувальна інваріантність відносно перетворень, що описуються непростотою компактною групою $Лі$	45
2.5 Рівняння руху та динамічні інваріанти для неабелевих теорій	48
Розділ 3 Спонтанне порушення симетрії. Генерація маси калібрувальних полів	55
3.1 Спонтанне порушення дискретної симетрії	58
3.2 Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $U(1)$	62
3.3 Часткове порушення неперервної глобальної симетрії на прикладі групи $SO(3)$	68
3.4 Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $SU(2)$	70
3.5 Загальний випадок. Теорема Голдстоуна	72
3.6 Механізм Хіггса генерації маси калібрувальних полів	75
3.7 Формалізм Штюкельберга для опису масивних векторних полів групи $U(1)$	80
3.8 Маса поля Штюкельберга	91

Розділ 4	Лагранжіан Стандартної Моделі	96
4.1	Загальні положення СМ	97
4.2	Застосування принципу локальної калібрувальної інваріантності. Введення калібрувальних полів у СМ .	103
4.3	Застосування принципу спонтанного порушення симетрії. Кут змішування Вайнберга. Маси калібрувальних полів	107
4.4	Маса полів матерії. Змішування у кварковому секторі. Матриця Кабіббо-Кобаяши-Маскава	118
4.5	Лагранжіан СМ в унітарному калібруванні	124
4.6	Теорія Фермі. Чотириферміонна взаємодія	129
4.7	Чому лагранжіан СМ має бути саме таким? Погляд назад	132
4.8	Глобальні симетрії СМ	139
4.9	Властивості лагранжіану СМ відносно С-, Р-, Т-перетворень	145
4.10	Чисельні значення параметрів СМ	157
4.11	Лагранжіан СМ в довільному калібруванні	164
4.12	Духові поля в лагранжіані СМ	171
Розділ 5	Проблеми Стандартної Моделі	182
5.1	Масивні нейтрино	183
5.2	Проблема темної матерії та темної енергії	187
5.3	Баріонна асиметрія у Всесвіті	192
Розділ 6	Питання до Стандартної Моделі	197
6.1	Проблема СР-інваріантності сильної взаємодії	197
6.2	Поведінка сталих зв'язку при великих енергіях	209
6.3	Проблема ієрархії	210
6.4	Стабільність електрослабкого вакууму	212
Розділ 7	Варіанти розширення СМ	229
7.1	Ідея пошуку легких, довгоживучих частинок нової фізики в експериментах на прискорювачах	233
7.2	Скалярний портал	237
7.3	Нейтринний портал	245
7.4	Векторний портал. Кінетичне змішування	252

7.5	Поле Штюкельберга в СМ. Маса фотона	258
7.6	Взаємодії за участю поля Штюкельберга	261
7.7	Портал псевдоскалярів. Аксиони та аксіоноподібні частинки	268
7.8	Портал Черн-Саймонса	280
7.9	Теорії великого об'єднання на прикладі теорії групи $SU(5)$	286
Додаток 1. Елементи теорії груп		310
Додаток 2. Група $SU(2)$. Інфінітезимальний підхід		327
Додаток 3. Перетворення полів під дією групи Пуанкаре		333
Додаток 4. Кіральні стани ферміонів		335
ЛІТЕРАТУРА		337

ВСТУП

Стандартна модель фізики елементарних частинок (СМ) була сформульована наприкінці 1960-х років завдяки роботам Стівена Вайнберга, Абдуса Салама та Шелдона Глешоу. Вона є найуспішнішою на сьогодні теорією, що описує електромагнітні, слабкі та сильні взаємодії елементарних частинок. Передбачення СМ пройшли перевірку великою кількістю високоточних експериментів на енергетичних масштабах до ~ 10 TeV, а також добре узгоджуються з даними астрофізичних і космологічних спостережень.

Цей навчальний посібник підготовлено на основі матеріалів лекцій і практичних занять зі спеціального курсу «Основи квантової теорії поля», який автор читає для студентів фізичного факультету освітньої програми «Фізика високих енергій», а також курсу «Розширення Стандартної моделі» для студентів освітньої програми «Квантова теорія поля».

Метою посібника є виклад основних принципів, на яких ґрунтується Стандартна модель:

- побудова лагранжіана теорії поля на основі вимоги його інваріантності щодо перетворень певної групи симетрії;
- принцип локальної калібрувальної інваріантності, який дозволяє коректно ввести калібрувальні поля та визначає характер їхньої взаємодії з полями матерії;
- спонтанне порушення симетрії та механізм Хіггса, що забезпечують виникнення мас калібрувальних бозонів;
- вимога збереження унітарності амплітуд фізичних процесів при високих енергіях.

Зазначені принципи дозволяють вивести явний вигляд лагранжіана Стандартної моделі та зрозуміти фундаментальні засади сучасної фізики елементарних частинок. Водночас низка експериментальних і космологічних фактів — зокрема наявність мас у нейтрино, баріонна асиметрія Всесвіту та існування темної матерії — свідчить про те, що СМ не є повною теорією природи й потребує подальшого розширення. Проте можна очікувати, що побудова нової, більш фундаментальної теорії також спиратиметься на ті самі базові принципи.

У посібнику розглянуто основні підходи до розширення Стандартної моделі шляхом введення нових скалярних, псевдоскалярних, ферміонних, векторних або псевдовекторних частинок. Наразі не існує переконливих експериментальних підтверджень існування частинок за межами СМ. Це може мати два основні пояснення. По-перше, частинки нової фізики можуть бути надто важкими (наприклад, мати маси понад 100 TeV), що робить їх недосяжними для сучасних прискорювачів. По-друге, вони можуть бути відносно легкими, але дуже слабо взаємодіяти з частинками Стандартної моделі. У такому разі їх народження можливе навіть на сучасних колайдерах, проте відповідні події трапляються надзвичайно рідко і тому їх важко виявити експериментально.

Другий сценарій є особливо цікавим, оскільки відкриває можливість пошуку проявів нової фізики вже на наявних експериментальних установках. Саме тому основну увагу в цьому посібнику приділено легким слабковзаємодіючим частинкам та їхнім можливим феноменологічним проявам.

Друге видання посібника є суттєво розширеною версією першого. До нього включено нові розділи, присвячені формалізму векторних полів Штюкельберга, проблемі стабільності електрослабкого вакууму та теоріям великого об'єднання на прикладі групи симетрії SU(5). Крім того, виправлено низку неточностей і помилок, виявлених у першому виданні, а також істотно розширено й доповнено матеріал раніше представлених розділів.

Автор буде вдячний за побажання та зауваження щодо покращення даного посібника. Їх можна надіслати на електронну адресу gorkavol@knu.ua

ПОЗНАЧЕННЯ ТА ЗАПИС ОСНОВНИХ ВЕЛИЧИН

Позначення

Ми будемо працювати у плоскому просторі-часі, для якого метричний тензор $g^{\mu\nu}$ має діагональний вигляд

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.1)$$

Перехід від контраваріантних до коваріантних компонент відбувається за допомогою метричного тензора

$$a_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\nu, \quad f_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=0}^3 g_{\mu\gamma} f^\gamma_\nu = \sum_{\gamma,\delta=0}^3 g_{\mu\gamma} g_{\delta\nu} f^{\gamma\delta}, \quad \sum_{\mu=0}^3 g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta^\beta_\alpha, \quad (0.2)$$

де δ^β_α – одиничний тензор ($\delta^\alpha_\alpha = 1$; $\delta^\beta_\alpha = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$). Для метричного тензора у формі (0.1): $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Зокрема, чотиривимірний радіус-вектор та чотиривимірний вектор імпульсу є контраваріантними величинами: $x^\alpha = (ct, \vec{x})$, $p^\alpha = (E/c, \vec{p})$, – тобто коваріантними векторами до них будуть $x_\alpha = (ct, -\vec{x})$ та $p_\alpha = (E/c, -\vec{p})$.

Скалярний добуток двох контраваріантних 4-векторів $a = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$ та $b = (b^0, b^1, b^2, b^3) = (b^0, \vec{b})$ визначається як

$$ab = \sum_{\nu=0}^3 a^\nu b_\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g^{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (0.3)$$

В окремих випадках, у громіздких формулах для спрощення розуміння виразів скалярний добуток 4-векторів буде братися в дужки $ab \equiv (ab)$.

Для похідних використовуються позначення

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha u_i. \quad (0.4)$$

Для спрощення записів будемо опускати знак підсумовування і вважати, що за двома індексами, які повторюються, якщо окремо не зазначено, проводиться підсумовування.

Системи одиниць. Енергетичні одиниці.

Система одиниць $\hbar = c = 1$.

У рамках даного курсу нам знадобляться наступні сталі: стала Планка ($\hbar$), швидкість світла у вакуумі (c), електричний заряд та маса частинки — кванта електрон-позитронного поля.

Розмірність та значення даних величин залежать від обраної системи одиниць. Існує багато варіантів вибору системи одиниць. Наведемо значення потрібних нам констант у системах одиниць СІ та СГС (СГСЕ).

У міжнародній системі одиниць СІ нами будуть використовуватися такі основні одиниці: метр (м), секунда (сек), кілограм (кг), Кулон (Кл), Джоуль (Дж) ($1\text{Дж} = 1\text{кг} \cdot 1\text{м}^2/1\text{сек}^2$). Тоді значення вказаних констант є наступними:

$$\begin{cases} \hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{сек}; \\ c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ м/сек}; \\ |e| = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}; \\ m_e = 9.10938 \cdot 10^{-31} \text{ кг}. \end{cases} \quad (0.5)$$

В електростатичній системі СГС (СГСЕ) базовими одиницями є сантиметр (см), грам (г), секунда (сек):

$$\begin{cases} \hbar = 1.05457 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{сек}, \quad (1\text{ерг} = 1\text{г} \cdot 1\text{см}^2/1\text{сек}^2); \\ c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}; \\ |e| = 4.80320 \cdot 10^{-10} \text{ од. СГСЕ, має розмірність } \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2}/\text{сек}; \\ m_e = 9.10938 \cdot 10^{-28} \text{ г}. \end{cases} \quad (0.6)$$

Щоб задати інтенсивність деякої взаємодії незалежно від обраної системи одиниць, треба ввести певний безрозмірний параметр. Так, для електродинаміки інтенсивність взаємодії можна визначати через

енергію кулонівської взаємодії між двома частинками з елементарними зарядами одного знака, що знаходяться на відстані r одна від одної: $E = k \cdot e^2/r$. Параметр k та елементарний заряд e в різних системах одиниць мають різні значення. Поділивши обидві частини виразу на величину $\hbar c$ розмірності [Енергія] $\cdot$ [Довжина], отримаємо $E/\hbar c = \alpha/r$, де безрозмірна величина $\alpha = ke^2/\hbar c$ отримала назву *сталої тонкої структури*¹. Вона є комбінацією фундаментальних сталих релятивістської квантової фізики і визначає інтенсивність процесів за участю електромагнітної взаємодії.

Отже, стала тонкої структури визначається, спираючись на запис закону Кулона в певній системі одиниць. Наприклад,

$$\text{в СГС (СГСЕ)} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \text{в СІ} \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (0.7)$$

де $\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Дж} \cdot \text{м}$ – електрична стала в СІ. Числове значення α не залежить від вибраної системи одиниць

$$\alpha = 0.00729735 \cdot 10^{-3} \approx 1/137.036. \quad (0.8)$$

Як система одиниць СІ, так і система СГСЕ, не є зручними в теорії поля: числові значення вказаних сталих є або надзвичайно великими, або надзвичайно малими. Наприклад, одиниця виміру маси 1 кг (або 1 г) є надзвичайно великою для опису відомих елементарних частинок, так само й енергетична одиниця 1 Дж (або 1 ерг) є занадто великою для опису процесів у Стандартній моделі. Тому зручно ввести нову енергетичну одиницю і домовитися нею вимірювати масу. Ми маємо право це зробити, якщо використати співвідношення між масою та енергією частинки в стані спокою у вигляді $E = mc^2$. У якості енергетичної одиниці в квантовій теорії поля вибирається енергія, яку отримує електрон, проходячи різницю потенціалу в 1 Вольт. Ця одиниця отримала назву електронвольт (еВ):

$$1\text{eV} = |e| \cdot 1\text{В} = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ Джоуль} = 1.60218 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}. \quad (0.9)$$

Використовуються також похідні одиниці, а саме: мегаелектронвольт (1MeV = 10^6 eV), гігаелектронвольт (1GeV = 10^9 eV), тераелектронвольт (1TeV = 10^{12} eV) та інші.

¹Стала отримала назву завдяки ефекту розщеплення рівнів енергії атому за рахунок спин-орбітальної взаємодії. Цей ефект пропорційний α^2 .

В цій системі одиниць, зокрема, маса електрона буде рівною $m_e c^2 = 9.10938 \cdot 10^{-31} \cdot 299792458^2 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с} = 8.1871 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 0.511 \text{ МеВ}$.

Однак навіть після переходу в нові енергетичні одиниці все рівно залишаються деякі незручності пов'язані із захащенням формул комбінаціями констант $\hbar$ та c . Тому в квантовій теорії поля найбільш зручною виявилась система одиниць, в якій $\hbar = c = 1$, тобто дія та швидкість є безрозмірними величинами. Тоді енергія та імпульс мають розмірність маси, що очевидно, наприклад, з наступних співвідношень: $E = mc^2$, $p = mv$. Отже, $[E] = [p] = [m]$.

Розмірність довжини та часу також виражаються через розмірність маси $[t] = [x] = [m^{-1}]$, оскільки, наприклад, $x = vt$, $Et \sim \hbar$, $px \sim \hbar$. Числові значення легко отримати з системи рівнянь, що складається з означень $\hbar$ та c , якщо згадати, що розмірність $\hbar$ є $1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ сек} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2 / 1 \text{ сек}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2 / 1 \text{ сек} = 1; \\ c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ м/сек} = 1; \\ 1 \text{ кг} = 5.60959 \cdot 10^{35} \text{ еВ}; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ м} = 5.06773 \cdot 10^6 \text{ еВ}^{-1}; \\ 1 \text{ сек} = 1.51927 \cdot 10^{15} \text{ еВ}^{-1}. \end{array} \right. \quad (0.10)$$

Розмірності величин, що експериментально спостерігаються та явно обраховуються в теорії поля також виражаються через розмірність маси, а саме: переріз розсіяння $[\sigma] = [m^{-2}]$, ймовірність розпаду $[\omega] = [m]$. Тоді для виконання зворотного переходу потрібно знати як виразити через m , c , $\hbar$ правильну розмірність фізичних величин. Це легко зробити, враховуючи $[\frac{\hbar}{mc}] = [l]$, $[\frac{\hbar}{mc^2}] = [t]$. Корисно відмітити числові значення, наприклад, для $m = m_e$, згідно (0.5):

$$\frac{\hbar}{m_e c} = 3.86159 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \quad \frac{\hbar}{m_e c^2} = 1.28809 \cdot 10^{-21} \text{ с}. \quad (0.11)$$

Надалі, за невеликим виключенням, ми будемо працювати саме в системі одиниць $\hbar = c = 1$.

Системи одиниць Гауса та Хевісайда-Лоренца

Як відомо, у просторову густину лагранжіана електромагнітне поле входить завдяки двом доданкам. Перший доданок описує взаємодію

поля з електричними зарядами, другий – вільне електромагнітне поле

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{c}j^\mu A_\mu - a^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (0.12)$$

де j^μ – μ -та компонента чотири-вектора електричного струму $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, кожна компонента якого є пропорційною елементарному заряду e ; c – швидкість світла; a^2 – константа, що може бути обрана з міркувань зручності. Конкретний вибір цієї константи буде визначати, в якій системі одиниць ми працюємо.

У *гаусовій* системі одиниць $a^2 = 1/(16\pi)$, тоді польове рівняння набуває вигляду $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu$. Зокрема, кулонівський потенціал, що утворюється точковим зарядом Q на відстані r від свого положення, має вигляд

$$A_0 = \frac{Q}{r}. \quad (0.13)$$

У системі одиниць *Хевісайда-Лоренца* $a^2 = 1/4$, тоді польове рівняння спрощується: $\partial_\nu F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}j'^\mu$ (штрих означає величину в новій системі одиниць). Кулонівський потенціал, що створюється точковим зарядом Q' на відстані r від свого положення, отримує додатковий множник

$$A'_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q'}{r}. \quad (0.14)$$

Оскільки значення добутку $j^\mu A_\mu$ не повинно залежати від вибраної системи одиниць, легко встановити зв'язок між елементарними зарядами в різних системах одиниць, а саме: $e^2 = e'^2/(4\pi)$.

Надалі ми будемо працювати в системі одиниць Хевісайда-Лоренца і приберемо штрихи в позначеннях.

Стала тонкої структури в даній системі одиниць –

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}. \quad (0.15)$$

Оскільки ми домовилися працювати в системі $\hbar = c = 1$, то

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad (0.16)$$

тобто елементарний заряд у системі $\hbar = c = 1$ у позначеннях Хевісайда-Лоренца $e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx \sqrt{(4\pi)/137} \approx 0.3$ і є безрозмірною величиною.

Лагранжіан електричного поля із взаємодією та рівняння, що визначає динаміку поля, в даній системі одиниць матимуть вигляд

$$\mathcal{L}(x) = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu. \quad (0.17)$$

Зафіксувавши a^2 , легко отримати вирази для інших електромагнітних величин. Наприклад, у СІ

$$1 \text{ Вольт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}; \quad 1 \text{ Тесла} = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ сек}}. \quad (0.18)$$

Використавши (0.9), (0.10) та зв'язок між зарядом електрона в різних системах відліку

$$\sqrt{4\pi\alpha} = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad (0.19)$$

отримаємо

$$1 \text{ Вольт} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \text{ еВ} \approx 3.3 \text{ еВ}; \quad 1 \text{ Тесла} \approx 195.35 \text{ еВ}^2. \quad (0.20)$$

Представлення γ -матриць

γ -матриці в рівнянні Дірака не фіксуються однозначно умовами

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \text{та} \quad (\gamma^\mu)^+ = \gamma_\mu. \quad (0.21)$$

Вибір вигляду γ -матриць є питанням домовленості. Зв'язок між різними варіантами вибору γ -матриць встановлюється за допомогою **леми Паулі**: якщо існують два набори матриць 4×4 γ^μ та γ'^μ , що задовольняють (0.21), то існує неособлива матриця S , що їх пов'язує: $\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$.

Із аналізу (0.21) випливає, що при зміні $\gamma \rightarrow \gamma' = S\gamma S^{-1}$ хвильова функція перетворюється як $\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi$. Отже, рівняння Дірака є інваріантним відносно перетворень

$$\gamma \rightarrow \gamma' = S\gamma S^{-1}, \quad \Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi. \quad (0.22)$$

Найбільш поширеними є представлення Дірака та кіральне (вейлівське) представлення.

Представлення Дірака зручно використовувати для аналізу нерелятивістського наближення. У ньому

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^5 &= \gamma^{5+} = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{0.23}$$

де I є одиничною матрицею 2×2 , а σ^i є матрицями Паулі:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{0.24}$$

Представимо також явний вигляд матриць $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$ та $\vec{\Sigma} = -\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}$ (векторні величини тут мають верхні індекси):

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.\tag{0.25}$$

Кіральне представлення є зручним та часто використовується при розгляді процесів у Стандартній моделі. Воно має певні переваги для розгляду ультрарелятивістського наближення.

Кіральне представлення отримується з представлення Дірака за допомогою матриці:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix},$$

тоді

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^5 &= \gamma^{5+} = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{0.26}$$

Наведемо також явний вигляд матриць $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$ та $\vec{\Sigma} = -\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}$ (векторні величини тут мають верхні індекси):

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}; \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.\tag{0.27}$$

РОЗДІЛ 1

Передумови та коротка історія створення СМ

Квантова теорія поля виникла наприкінці 20-х років ХХ століття [1]. Причиною цього була потреба в описі фізики при високих енергіях як теорії, що повинна враховувати як релятивістські ефекти, так і ефекти, пов'язані з перетворенням одних частинок в інші, народженням та знищенням частинок під час фізичних процесів.

У квантовій теорії поля елементарні частинки є квантами відповідних полів, а їх взаємодія відбувається за рахунок обміну квантами полів, що переносять взаємодію.

Історично першими полями, з якими мала справу квантова теорія поля, були електромагнітні та ферміонні (електрон-позитронні) поля, як єдині відомі на той момент. Для опису взаємодій між квантами цих полів була створена квантова електродинаміка, котру можна описати за допомогою лагранжіана

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu, \quad (1.1)$$

де Ψ — функція електрон-позитронного поля, A_μ — 4-потенціал електромагнітного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор Максвелла, e — електричний заряд позитрона (константа взаємодії). Перші два доданки відповідають лагранжіанам вільного електрон-позитронного та електромагнітного полів, а третій описує взаємодію зазначених полів. Пізніше, після відкриття нових частинок, термін квантова електродинаміка почали використовувати в більш широкому розумінні: як теорію, що описує взаємодію електрично заряджених частинок із електромагнітним полем.

Дослідження β -розпаду на початку ХХ століття виявило проблему, суть якої полягала в нібито невиконанні фундаментальних законів збереження енергії, імпульсу та моменту кількості руху в реакції β -розпаду, тобто процесу, коли ядро з атомними числами (A, Z) розпадається на ядро з числами $(A, Z + 1)$ та на електрон. Справа в

тому, що ще в 1914 році Джеймсом Чедвіком [2] був виміряний спектр енергій електронів, які виникають при β -розпаді. Спектр виявився неперервним, тобто з ядра вилітали електрони з довільними значеннями енергій. Однак, згідно з законом збереження енергії-імпульсу, при розпаді однієї частинки на дві частинки, їх енергії визначаються однозначно. Тобто спектр електрона в реакції β -розпаду не може бути неперервним. Ще одна проблема β -розпаду була пов'язана з порушенням теореми Паулі про зв'язок спіну зі статистикою. Справа в тому, що при β -розпаді атомне число A в початковому та кінцевому стані ядра не змінюється, тому й статистика ядра не повинна змінитися. Отже, якщо з ядра вилітає лише електрон, то він повинен мати цілий спін, що насправді не відповідає дійсності.

Щоб урятувати ситуацію, 4 грудня 1930 р. Вольфганг Паулі в неформальному листі до учасників конференції в Тьубінгені [3] висунув гіпотезу про існування в ядрі нової електрично нейтральної частинки зі спіном $1/2$. Дана частинка повинна дуже слабо взаємодіяти з речовиною і при вильоті з ядра в процесі β -розпаду разом з електроном буде забирати із собою частину енергії, імпульсу та кутового моменту, що й забезпечуватиме виконання фундаментальних законів збереження для реакції в цілому. Ідея ввести нову елементарну частинку була справді революційною, оскільки на той час було відомо лише три "елементарні" частинки – електрон, протон та фотон. Запропоновану частинку Паулі назвав "нейтроном".

Однак відразу ж поставало наступне питання: якщо вказана частинка нейтральна та слабо взаємодіє з іншими, то яким чином вона утримується в ядрі? Відповідь була отримана після експериментального відкриття Джеймсом Чедвіком в 1932 році нейтрона – масивної нейтральної частинки, яка є складовою атомного ядра [4]. Це відкриття розв'язало проблему статистики ядер та привело до побудови в 1934 році Енріко Фермі теорії β -розпаду [5]. При цьому частинку Паулі Фермі запропонував перейменувати в нейтрино¹ (позначення ν), що можна перекласти з італійської мови як нейтрончик². Згідно з теорією Фермі, один з нейтронів ядра випускає (породжує) пару електрон-нейтрино (точніше, антинейтрино) та перетворюється на протон:

¹ Античастинка отримала назву антинейтрино (позначення $\bar{\nu}$).

² Справа в тому, що на той момент вже була зроблена оцінка маси нейтрино ($m_\nu \ll m_n$) на основі аналізу її впливу на енергетичний спектр електронів у β -розпаді.

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}. \quad (1.2)$$

У стаціонарному стані нейтрино в ядрі немає.

Згідно з теорією Фермі, взаємодія всіх чотирьох частинок відбувалася не за допомогою посередника (аналога віртуального фотона в квантовій електродинаміці), а контактним способом через взаємодію двох векторних струмів у одній точці простору

$$\mathcal{H}_{Fermi}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_p(x)\gamma^\mu\Psi_n(x)] [\bar{\Psi}_e(x)\gamma_\mu\Psi_\nu(x)] + h.c., \quad (1.3)$$

де Ψ з певним індексом – хвильова функція відповідної частинки (протона, нейтрона, електрона та нейтрино), $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ – діраковськи-спряжена функція, γ_μ – матриці Дірака, G_F – стала взаємодії, що отримала назву *сталой Фермі*. Літери *h.c.* в кінці (1.3) означають, що до наведеного виразу слід додати той самий вираз, але ермітово спряжений.

Вибір взаємодії саме двох векторних струмів був зроблений Фермі за аналогією до квантової електродинаміки. Із явного вигляду гамільтоніана видно, що стала Фермі G_F має бути розмірною. Її числове значення було знайдено завдяки вимірам часу життя радіоактивних елементів та нейтрона і виявилось дуже малим (сучасне значення $G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ знаходиться з вимірювання часу життя мюона).

Теорія Фермі кількісно описувала процес β -розпаду та передбачала інші процеси за участю нейтрино. Фактично, це опосередковано підтверджувало існування нейтрино, і це був початковий варіант теорії слабкої взаємодії, який, із певними доповненнями, домінував аж до створення об'єднаної теорії електрослабких взаємодій Вайнберга-Салама-Глешоу.

В 1934 році Ганс Бете та Рудольф Пайєрлс [6] на основі гамільтоніану Фермі розраховували переріз оберненого β -розпаду, тобто процесу

$$p^+ + \bar{\nu} \rightarrow n^0 + e^+. \quad (1.4)$$

Їх розрахунки показали, що довжина вільного пробігу нейтрино з енергією 2.5 MeV (характерна енергія при β -розпаді) у воді буде близько 10^{18} м або 100 світлових років! Бете та Пайєрлс зробили песимістичний висновок, що, мабуть, нейтрино ніколи не буде явно зареєстроване.

Як виявилося пізніше, гамільтоніан Фермі (1.3) не описував усі особливості β -розпаду, і тому вже в 1936 році Георгій Гамов та Едвард Теллер [7] запропонували до розгляду узагальнений гамільтоніан

$$\mathcal{H}_{GF}(x) = \sum_i G_i [\bar{\Psi}_p(x) O^i \Psi_n(x)] [\bar{\Psi}_e(x) O_i \Psi_\nu(x)] + h.c., \quad (1.5)$$

де матриці $O^i = \hat{1}, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}$ представляли всі можливі попарні взаємодії скалярних (S), векторних (V), псевдовекторних (A), псевдоскалярних (P) та тензорних (T) струмів. Такі комбінації струмів були обрані саме тому, що вони забезпечували збереження просторової парності. У справедливість даного закону збереження вірили, оскільки були докази його виконання в електромагнітній взаємодії.

В 1936 році Карл Андерсон та Сес Неддермейер у космічних променях відкрили мюон (μ) – частинку, хоч і нестабільну, проте повністю схожу на електрон, але із масою приблизно в 207 разів більшою за масу електрона.

В 1938 році було опосередковано доведено існування нейтрино під час спостереження в камері Вільсона треків ядра віддачі та електрона, що випромінюється при β -розпаді. Зазначені треки не були спрямовані у протилежні сторони; це свідчило про те, що частину імпульсу забирає додаткова частинка – нейтрино [8]. Явно задетектувати електронне антинейтрино вдалося Клайду Коуену та Фредеріку Рейнсу під час експериментів у 1953 - 1956 роках [9], спостерігаючи за взаємодією антинейтрино (утворених в реакторі) з протонами у воді з розчином солі $CdCl_2$, що привела до утворення нейтронів та позитронів¹. Вони міркували наступним чином: щоб бути зареєстрованим, нейтрино потрібно пройти шлях у воді довжиною 10^{18} м; тоді для реєстрації одного нейтрино з пучка, що містить 10^{18} частинок, буде достатньо подолати 1 м у воді. Цей експеримент був вирішальним у тому сенсі, що вперше було зареєстровано нейтрино на певній відстані від точки його народження.

Експериментально існування мюонного нейтрино було доведено лише в 1962 році на прискорювачі в Брукхейвені [10]. Було показано, що реакторні нейтрино від процесів $\pi^\pm \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \mu^\pm$ та $K^\pm \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \mu^\pm$, потрапляючи в мішень, генерують лише мюони. Тобто було доведено $\nu_e \neq \nu_\mu$!

¹Оскільки нейтрино вважалася частинкою, що не спостерігається, даний експеримент отримав назву "Проект Полтергейст".

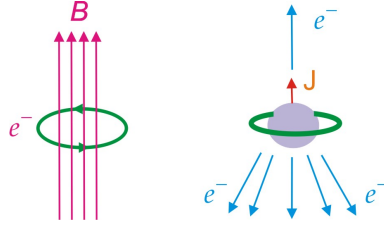


Рис. 1: Ілюстрація результатів експериментів Ву.

В 1957 році Цзяньсюн Ву експериментально підтвердила порушення парності в слабких взаємодіях [11]. В експерименті явно спостерігалася асиметрія у випромінненні β -частинок при β -розпаді поляризованих ядер ^{60}Co : електрони переважно випромінювались у напрямку, протилежному спіну ядра та напрямку зовнішнього магнітного поля, див. Рис. 1. Фактично, було показано залежність результатів експерименту від величини $\vec{J}_{Co} \cdot \vec{p}_e$. Оскільки під дією оператора просторової інверсії (P) момент системи не змінюється, а просторовий імпульс змінює знак, то результати експерименту вказували на порушення симетрії по відношенню до P -перетворень.

В тому ж 1957 році відбулося декілька експериментів з метою перевірки результатів експерименту Ву. Всі вони показали порушення симетрії відносно перетворень просторової інверсії. Зокрема, в експерименті Фраунфелдера [12] з атомами $^{60}\text{Co}_{27}$ було показано, що релятивістські електрони, які вилітають при β -розпаді ядра, мають спіл, напрямлений протилежно до їх імпульсів.

Експеримент Ву показав, що пошук узагальненого гамільтоніана у формі (1.5) не був коректним, бо всі доданки зазначеного гамільтоніана є симетричними відносно перетворень просторової інверсії. Виходячи з цього, був запропонований новий узагальнений гамільтоніан у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{GF}(x) &\sim (J^{i, hadron} J_{i, lepton} + h.c.) = \\ &= \sum_{i=1}^5 \left[\bar{\Psi}_p(x) O^i (\tilde{G}_i + \tilde{G}'_i \gamma^5) \Psi_n(x) \right] \left[\bar{\Psi}_e(x) O_i (G_i + G'_i \gamma^5) \Psi_\nu(x) \right] + h.c., \end{aligned} \quad (1.6)$$

із невідомими константами G_i , $\tilde{G}_i$ та G'_i , $\tilde{G}'_i$, котрий містив доданки,

що порушували симетрію відносно просторових перетворень. Матриці O^i є матрицями $\hat{1}$, γ^μ , γ^5 , $\gamma^\mu\gamma^5$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]$.

Врахувати результат дослідів Фраунфелдера за допомогою доданків, що містять γ^5 матриці можна було лише припустивши, що електрони мають ліву кіральність¹: $\Psi_e = \hat{P}_L\Psi_e$, або $\bar{\Psi}_e = \bar{\Psi}_e\hat{P}_R$, див. Додаток 4. Отже, лептонний струм слід записати у вигляді

$$J_{i,lepton} \sim \bar{\Psi}_e(x) \frac{1+\gamma^5}{2} O_i (G_i + G'_i\gamma^5) \Psi_\nu(x). \quad (1.7)$$

Відповідь на питання, як знаходити ці нові константи, дала створена в тому ж 1957 році Лі та Янгом, Ландау та Саламом теорія двокомпонентного нейтрино [13–15]. Якщо припустити, що нейтрино є безмасовими частинками, тоді, виділивши у хвильовій функції нейтрино дві складові:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R, \quad \Psi_L = \hat{P}_L\Psi, \quad \Psi_R = \hat{P}_R\Psi, \quad (1.8)$$

отримаємо, що рівняння Дірака розщеплюються на два окремих рівняння² для функцій Ψ_L та Ψ_R . Це означає, що функції Ψ_L та Ψ_R стають незалежними, і можна використовувати лише одну з них³.

Отже, згідно з теорією двокомпонентних нейтрино, в природі може існувати лише один сорт нейтрино зі спіном, що спрямований або вздовж, або проти напрямку руху. У цьому випадку втратиться симетрія відносно P -перетворень, що переводять ліві частинки в праві та навпаки. Саме таку втрату симетрії й продемонстрував експеримент Ву. Тоді, згідно з теорією двокомпонентних нейтрино, існують лише два варіанти співвідношення, які пов'язують константи G_i та G'_i в (1.6): $G'_i = \pm G_i$.

В 1958 році група на чолі з Морісом Голдхабером провела експеримент з визначення спіральності нейтрино [16], тобто проекції спіну

¹Можна показати, що в безмасовому випадку, або для ультрарелятивістських частинок, функція з лівою кіральністю відповідає частинці, в якій спін спрямований проти напрямку її руху, а з правою кіральністю – частинці, в якій напрямок спіну співпадає з напрямком руху.

²Оператори $\hat{P}_{L,R}$ є проектуючими операторами, див. Додаток 4.

³У вейлівському (або кіральному) представленні γ -матриць функції Ψ_L та Ψ_R будуть являти собою дві верхні та дві нижні компоненти повної хвильової функції частинки відповідно. Залишивши в теорії лише одну з них, ми фактично переходимо від чотириккомпонентної хвильової функції до двокомпонентної, завдяки чому теорія й отримала свою назву.

частинки на напрямок її руху. Виявилося, що у всіх нейтрино напрямків спіну протилежний напрямку їх імпульсу, а для антинейтрино спін напрямлений уздовж напрямку їх імпульсу. На основі припущення, що нейтрино є безмасовими частинками (тоді спіральність та кіральність стають тотожними поняттями), було зроблено висновок, що вони є частинками з лівою кіральністю, отже, $G'_i = -G_i$.

Отже, лептонний струм слід записати у вигляді

$$J_{i,lepton} \sim \overline{\Psi}_e(x) \frac{1 + \gamma^5}{2} O_i \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi_\nu(x). \quad (1.9)$$

Однак, яким саме має бути оператор O_i . Вибір можна суттєво обмежити використавши такі співвідношення, див. Додаток 4:

$$\hat{P}_R \hat{1} \hat{P}_L = 0, \quad (1.10)$$

$$\hat{P}_R \gamma^\mu \hat{P}_L = \gamma^\mu \hat{P}_L, \quad (1.11)$$

$$\hat{P}_R \gamma^5 \hat{P}_L = 0, \quad (1.12)$$

$$\hat{P}_R \gamma^\mu \gamma^5 \hat{P}_L = -\gamma^\mu \hat{P}_L, \quad (1.13)$$

$$\hat{P}_R \sigma^{\mu\nu} \hat{P}_L = \sigma^{\mu\nu} \hat{P}_L. \quad (1.14)$$

Оскільки варіанти (1.11) та (1.13) є подібними, то фактично з наведених п'яти варіантів залишаються лише два: $O^V = \gamma^\mu$ та $O^T = \sigma^{\mu\nu}$. Вибір між ними на користь O^V був зроблений завдяки аналізу кутових розподілів під час β -розпадів [17].

У 1958 році Річард Фейнман, Мюррей Гелл-Манн, Роберт Маршак та Джордж Сударшан запропонували гамільтоніан [18–20], до якого входять лише ліві компоненти польових функцій

$$J_\mu = \overline{\Psi}_{n,L} \gamma^\mu \Psi_{p,L} + \overline{\Psi}_{e,L} \gamma^\mu \Psi_{\nu,L}, \quad \mathcal{H} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^+ J^\mu. \quad (1.15)$$

Це давало гарне узгодження¹ даних теорії β -розпаду з експериментальними даними в області низьких енергій.

Виникало природне запитання, чи можна застосовувати гамільтоніан (1.3), або (1.15) при збільшенні енергії? Виявилося, що ні. В 1957 році Цзундао Лі та Чженьнін Янг, а також Джуліан Швінгер [22, 23]

¹На даний час струм нуклонів (не є елементарними частинками, складаються з кварків) визначається достатньо складним виразом. При малих значеннях переданого імпульсу його можна наближено представити як $\sim \overline{\Psi}_n \gamma^\mu (1 - g_A \gamma^5) \Psi_p$, де $g_A \approx 1.26$, див. [21].

показали, що при високих енергіях буде порушуватись умова унітарності для гамільтоніана Фермі з точковою взаємодією. Проблема полягає в тому, що переріз певного слабкого процесу із взаємодією Фермі зростає квадратично з енергією частинок $\sigma \sim G_F^2 E^2$. Це означає, що й амплітуда процесу зростає з енергією. Однак амплітуда визначає ймовірність реалізації кінцевого стану і не може бути більшою за одиницю. Коли ймовірність процесу перевищує одиницю, відбувається порушення унітарності матриці розсіювання. У теорії Фермі унітарність порушується при енергіях $E \sim G_F^{-1/2}$. Щоб уникнути даної проблеми, було запропоновано ввести проміжну масивну векторну частинку, котра буде виступати в ролі носія взаємодії аналогічно фотону у квантовій електродинаміці. Тоді пропагатор даної частинки, що обернено пропорційний до $M^2 - k^2$, при невеликих енергіях буде $\sim M^{-2}$; і стає зрозумілим, чому константа Фермі є розмірною: $G_F \sim M^{-2}$. При цьому переріз слабких процесів $\sigma \sim E^2/(M^2 + E^2)$ при великих енергіях прямує до сталого значення.

До цього моменту мова йшла про слабку та електромагнітну взаємодію частинок, але існує й сильна взаємодія між частинками. Зокрема, саме завдяки їй протони та нейтрони утримуються всередині ядра. Щоб установити характер цієї взаємодії, було проведено багато дослідів зі зіткнення протонів з ядрами. Можна було очікувати, що з ядерних реакцій спостерігатимуться лише протони та ядра, проте в експериментах (зокрема в космічних променях і на прискорювачах) було відкрито нові частинки — піони, Λ , Σ та інші. Їх кількість швидко зросла до сотень (так званий “зоопарк частинок”). На початку 1960-х років, за пропозицією Льва Окуня [24], такі частинки стали називати адронами і поділяти на мезони (бозони) та баріони (ферміони). Виникла проблема класифікації такої великої кількості частинок, або, якщо точніше, виникло питання: чому їх саме стільки і чи можна їх розділити на певні групи за якимись ознаками?

Також виникло питання, чи є нуклони елементарними частинками, оскільки було незрозуміло, як у зіткненнях типу елементарних частинок (нуклонів) могло утворюватися стільки нових частинок (адронів). На користь цієї гіпотези говорило також те, що експерименти з розсіювання електронів на протонах у 50-х роках ХХ-го століття і пізніше показали, що для коректного опису процесів розсіювання потрібно вводити формфактор розподілу заряду в протоні. З цього факту випливало,

що протон не є точковою частинкою: його (електромагнітний) радіус $R_p \approx 0.8 \cdot 10^{-13}$ см.

Уже під кінець 40-х років XX століття почали створювати різні моделі адронів як частинок, що складаються з інших частинок. Модель Енріко Фермі та Чженьнін Янга 1949 року передбачала, що піони складаються з одного нуклона та одного антинуклона, а модель Моісея Маркова та Сьоїті Саката 1956-1958 років для пояснення властивостей каонів спиралася на те, що складовими частинами адронів є нуклони, лямбда-баріони та їх античастинки.

В 1961 році Мюррей Гелл-Манн та Юваль Нееман незалежно запропонували схему класифікації адронних станів, що отримала назву Вісімковий шлях та була заснована на $SU(3)$ симетрії [25–27].

В 1964 році для пояснення великої кількості адронів Мюррей Гелл-Манн та Джорд Цвейг запропонували кваркову модель адронів [28–31]. У рамках цієї моделі вони змогли систематизувати різноманіття існуючих адронів на основі симетрії групи $SU(3)$. В 1964 році автори моделі вважали, що нуклони складаються з трьох ароматних кварків¹ та їх античастинок. Запропоновану модель наукове товариство зустріло з запитанням: чи є кварки фізичними частинками, або ж вони просто математична абстракція, що дозволяє систематизувати адрони?

В 1968 році експерименти на Стенфордському лінійному прискорювачі з глибоко-непружного розсіяння лептонів на протонах показали, що протон містить всередині себе точкоподібні об'єкти. Це були верхні та нижні кварки. Також опосередковано було доведено існування дивних кварків.

У 1970 р. у роботі Шелдона Глешоу, Джона Іліопулоса та Лучано Майані [32] було запропоновано розширити кваркову модель шляхом введення четвертого кварка, що отримав назву чарівного (англ. *charm*, позначають як *c*-кварк). Це припущення ґрунтувалося на двох міркуваннях. По-перше, число чотири відповідало кількості відомих на той час лептонів — електрона, мюона та двох пов'язаних із ними нейтрино; по-друге, у межах кваркової моделі воно дозволило отримати масові формули, які правильно відтворювали маси відомих мезонів.

¹Верхній кварк (англ. *up*, позначають як *u*-кварк), нижній кварк (англ. *down*, позначають як *d*-кварк) та дивний кварк (англ. *strange*, позначають як *s*-кварк).

В 1973 році Макото Кобаяші та Тошихіде Маскава запропонували розширити кваркову модель до шести кварків [33], оскільки це могло пояснити факт порушення CP-симетрії в електрослабких процесах, що експериментально спостерігався ще в 1964 році Джеймсом Кроніном та Велом Фітчем у дослідях із нейтральними каонами. Назва для нових кварків була запропонована Хаїм Харарі в 1975 році [34].

В 1974 році було експериментально доведено існування чарівного s -кварку майже одночасно на прискорювачі в Брукхейвені та на Стенфордському лінійному прискорювачі. Обидві команди отримали мезон, що складається з чарівного кварка та чарівного антикварка, але назвали його по-різному — J та Ψ мезон. Пізніше цей мезон отримав назву J/Ψ мезону. Відкриття чарівного кварку остаточно переконало наукову спільноту в справедливості кваркової моделі адронів.

П'ятий кварк назвали нижнім кварком третього покоління, або b -кварком (в англ. версії — *bottom* або, раніше, *beauty*). Шостий кварк отримав назву верхнього кварка третього покоління, або t -кварка (в англ. версії він має назву *top* або, раніше, *truth*). Вони були відкриті у Лабораторії ФерміЛаб у 1977 та 1995 роках відповідно.

Нарешті слід вказати на події, які призвели до створення Стандартної моделі фізики елементарних частинок.

В 1954 році Чженьнін Янг та Роберт Мілс представили до розгляду неабелеву калібрувальну теорію взаємодії нуклонів у ядрі та запропонували принцип локальної калібрувальної інваріантності [35]. Всі фізичні теорії поля повинні бути інваріантними відносно локальних калібрувальних перетворень. Даний принцип фактично є механізмом введення в теорію калібрувальних полів.

Як уже зазначалося, для того, щоб позбутися порушення унітарності при високих енергіях, у теорію Фермі потрібно було ввести частинку-носії взаємодії. Це мав бути масивний бозон калібрувального поля. Однак уведення масового доданку для калібрувального поля порушувало калібрувальну інваріантність лагранжіана. В 1964 році Роберт Браут, Франсуа Енглерт і незалежно Пітер Хіггс, Джеральд Гуральник, Карл Гаген та Том Кіббл запропонували механізм, який забезпечував введення маси калібрувальних полів завдяки спонтанному порушенню симетрії лагранжіана деякого скалярного поля (механізм Хіггса) [36–39]. У результаті спонтанного порушення симетрії мінімум енергії скалярного поля реалізовується при ненульовому ва-

куумному середньому польової функції. Слід відзначити, що запропонований механізм базувався на попередніх роботах з феноменологічної теорії надпровідності Гінзбурга-Ландау [40], теорії надпровідності Бардіна-Купера-Шриффера-Боголюбова [41–43] та моделі Йойтіро Намбу [44, 45] спонтанного порушення симетрії в субатомній фізиці.

Нарешті, наприкінці 1960-х років Стівен Вайнберг, Абдус Салам та Шелдон Глешоу запропонували модель [46–48], що базується на локальній калібрувальній інваріантності лагранжіану відносно групи $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$, де $SU(3)_C$ — кольорова група, що описує сильні взаємодії; $SU(2)_W$ — група слабого ізоспіну, $U(1)_Y$ — група слабого гіперзаряду, а їх прямий добуток $SU(2)_W \times U(1)_Y$ описує електрослабку взаємодію. У запропонованій моделі маси калібрувальних полів з'являються в результаті спонтанного порушення симетрії скалярного поля Хіггса, що призводить до зміни симетрії лагранжіана від електрослабкої $SU(2)_W \times U(1)_Y$ до електромагнітної $U(1)_{em}$.

Вже в 1973 році експериментально було доведено існування нейтральних струмів [49, 50], що обумовлені Z -бозонами та передбачаються СМ. Цей факт призвів до того, що вже в 1979 році С. Вайнберг, А. Салам та Ш. Глешоу отримали Нобелівську премію. Відзначимо, що безпосередньо Z - та $W^\pm$ -бозони, як окремі частинки, були експериментально відкриті лише у 1983 році в ЦЕРНі.

В 1975 році колаборація під керівництвом Мартіна Перла експериментально зареєструвала нову частинку, що була копією електрона, але важча за нього та за мюон [51]. Частинку назвали тау-лептоном, що походить від скорочення грецького слова "τρίτον" й означає "третій". Тоді у третього лептона повинен існувати ізотопічний партнер тау-нейтрино, який і був експериментально відкритий в 2000 році в Лабораторії Фермілаб у експерименті DONUT [52]. Нарешті, у 2012 році на Великому Адронному Колайдері було експериментально підтверджено існування бозона Хіггса.

Таким чином до СМ входять три покоління лептонів: (e, ν_e) , (μ, ν_μ) та (τ, ν_τ) відповідно; три покоління кварків (u, d) , (c, s) та (t, b) ; бозон Хіггса та калібрувальні поля — фотони (носії електромагнітної взаємодії), векторні $W^\pm$ та Z бозони (забезпечують слабку взаємодію) та глюони (забезпечують сильну взаємодію). На сьогоднішній день існування всіх частинок СМ підтверджено експериментально.

Як виявилось, запропонована модель, що отримала назву Стандартної Моделі фізики елементарних частинок (СМ), найкращим чи-

ном описує електромагнітні, слабкі та сильні взаємодії елементарних частинок. СМ вдало витримала перевірку великою кількістю високоточних експериментів за участю елементарних частинок до енергетичних масштабів ~ 100 GeV (а для окремих процесів і до декількох TeV) та добре узгоджується з космологічними спостережуваними даними.

Згідно зі СМ, нейтрино є безмасовими частинками та мають лише ліву спіральність. Сучасні експерименти з розпаду Z -бозона справді доводять, що існує лише три типи, або аромати, нейтрино (більш точно, їх кількість $N_\nu = 2.985 \pm 0.009$), звичайно, за умови, що їх маса $m < M_Z/2$ [53].

Однак, як виявилось пізніше, СМ не повною мірою описує фізику нейтрино. В 1998 році на конференції "Нейтрино-98" в Японії учасники експерименту Super-Kamiokande заявили про спостереження залежності потоку мюонних (атмосферних) нейтрино від азимутального кута [54]. Їх дані давали підстави вважати, що кількість нейтрино даного аромату залежить від відстані, яку вони пройшли. А це означало, що нейтрино мають масу та можуть самовільно переходити з одного аромату в інший (осцилювати). Навіть більше, подальші безпосередні спостереження кількості електронних антинейтрино від реактора на відстанях близько 100 км показали їх недостачу порівняно з теоретичними передбаченнями (експеримент KamLAND). Це остаточно довело наявність осциляцій, а значить, і масивність нейтрино. Виявилось, що нейтрино мають надзвичайно малу масу порівняно з іншими масивними частинками в СМ. Сучасне обмеження на сумарну масу всіх ароматних нейтрино становить $m_e + m_\mu + m_\tau < (0.17 - 2.0)$ eV [53]. Проблема ж полягає в тому, що в СМ описує нейтрино як строго безмасові частинки.

Існує також ряд інших проблем (темна матерія, баріонна асиметрія Всесвіту тощо), які дають підставу стверджувати, що СМ не є завершеною теорією і потребує модифікації. Існують різні варіанти, як це зробити, однак поки жодному з них не можна надати перевагу. Потрібні додаткові експерименти. Можливо, результати подальших експериментів на Великому Адронному Колайдері, прискорювачах нового покоління та астрофізичні спостереження проявів темної матерії дадуть можливість відповісти на деякі з поставлених запитань.

РОЗДІЛ 2

Принцип локальної калібрувальної інваріантності

Вступ

Як вже зазначалося в Розділі 1, історично при описі процесів слабкої взаємодії на прикладі β -розпаду в рамках ефективної теорії Фермі відповідний лагранжіан взаємодії (1.15) призводить до нефізичних наслідків при описі взаємодії при великих енергіях. З теоретичної точки зору проблему можна вирішити припустивши існування масивного зарядженого векторного поля, що є переносником слабкої взаємодії (поле $W^\pm$ -бозонів). Припущення про те, нове електрично заряджене векторне поле має взаємодіяти з електромагнітним полем так само як і в квантовій електродинаміці $\partial_\mu W_\nu^+ \rightarrow D_\mu W_\nu^+ = (\partial_\mu - ieA_\mu)W_\nu^+$ виявилось хибним і призводить до нефізичних наслідків, див. детальніше Розділ 4.7. Оскільки квантова електродинаміка базується на інваріантності лагранжіана відносно перетворень групи $U(1)$, то виникло припущення про необхідність шукати лагранжіан слабкої взаємодії, що буде інваріантним відносно іншої групи симетрії. Виявилось, що процедуру введення взаємодій у випадку лагранжіану з іншою групою симетрії надає так званий принцип локальної калібрувальної інваріантності.

У квантовій теорії поля наявність інваріантності лагранжіана відносно групових перетворень полів призводить до значних фізичних наслідків та результатів.

Інваріантність лагранжіана відносно глобальних (однакових у будь-якій точці простору) перетворень певної групи призводить, згідно з теоремою Ньотер, до існування динамічних інваріантів, тобто величин, комбінацій польових функцій та їх похідних, що зберігаються

в часі. Так, наприклад, інваріантність лагранжіана відносно перетворень трансляцій призводить до збереження енергії-імпульсу в системі; інваріантність лагранжіана відносно поворотів – до збереження моменту імпульсу системи, а інваріантність відносно перетворень групи $U(1)$ призводить до збереження заряду в системі і т.д.

Однак, наявна в певній системі інваріантність відносно одночасних та однакових перетворень для різних точок простору, навіть тих, що не пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком, виглядає як формальна, математично обумовлена симетрія. У цьому розумінні хотілося б вимагати, щоб фізична система мала також інваріантність відносно перетворень, параметри яких можуть бути різними в різних точках простору. Такі перетворення називають локальними, а інваріантність лагранжіана відносно них вимагатиме введення в теорію калібрувальних полів, які, фактично, будуть описувати взаємодію між частинками моделі. Розгляду локальних перетворень і буде присвячено даний розділ.

2.1 Група $U(1)$

Лагранжіан вільного спірного поля

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (2.1)$$

є інваріантним відносно глобальних перетворень групи¹ $U(1)$:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi, \quad \text{відповідно} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{i\alpha}\bar{\psi}, \quad (2.2)$$

де α — довільна дійсна константа; $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ — діраковськи-спряжена ферміонна функція. Інваріантність забезпечується завдяки тому, що множник $e^{i\alpha}$ можна перенести через усі доданки лагранжіана з правого боку в лівий

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = \bar{\psi}e^{i\alpha}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{-i\alpha}\psi = \\ &= \bar{\psi}e^{i\alpha}e^{-i\alpha}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Одночасна зміна фази ферміонної функції на одне й те саме значення в усьому просторі (Всесвіті) з фізичної точки зору є некоректною процедурою. Справді, яким чином можна забезпечити одночасну зміну фази у віддалених ділянках Всесвіту, що не пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком? Більш фізичною здається ситуація, коли фаза ферміонної функції може змінюватися неперервно, але порізно в кожній точці простору, тобто $\alpha = \alpha(x)$. У цьому випадку говорять про інваріантність лагранжіана відносно локальних перетворень.

Легко помітити, що у випадку, коли $\alpha = \alpha(x)$, інваріантність лагранжіана (2.1) відносно перетворень (2.2) порушується:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}e^{i\alpha(x)}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{-i\alpha(x)}\psi = \\ &= \bar{\psi}e^{i\alpha(x)}[i\gamma^\mu(e^{-i\alpha(x)}(-i)\partial_\mu\alpha(x)\psi + e^{-i\alpha(x)}\partial_\mu\psi) - me^{-i\alpha(x)}\psi] = \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\alpha) - m)\psi \neq \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹Група $U(1)$ може бути реалізована як сукупність комплексних чисел, що по модулю дорівнюють одиниці. Тобто її елементи можна представити у вигляді $g = e^{-i\alpha}$, де α довільна дійсна константа.

Розглянемо тепер фізичну систему, в якій існує ферміонне (наприклад, електрон-позитронне) поле, що взаємодіє із безмасовим векторним (наприклад, електромагнітним) полем A_μ . У цьому випадку лагранжіан системи має вигляд¹

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

де взаємодія враховується шляхом подовження похідної $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$, e — константа зв'язку (електричний заряд ферміона), а останній доданок є лагранжіаном вільного безмасового векторного поля, в якому $F_{\mu\nu}$ є антисиметричним тензором Максвелла: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Корисно зазначити, що лагранжіан (2.5) можна записати у вигляді

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \quad (2.6)$$

явно виділивши лагранжіани вільних ферміонного та векторного полів, а також доданок їх взаємодії.

Легко показати, що лагранжіан (2.5) є інваріантним відносно глобальних перетворень (2.2). З'ясуємо, чи збереже він інваріантність відносно локальних перетворень

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{+i\alpha(x)}\bar{\psi}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu, \quad (2.7)$$

де A'_μ поки невідома функція. Отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA'_\mu) - m)\psi' - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\alpha - ieA'_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = \\ &= \bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu - ie\left(A'_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\right)\right\} - m\right)\psi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Як бачимо, лагранжіан (2.5) буде інваріантним до перетворень (2.7) лише за умови, якщо векторне поле при локальних перетвореннях змінюватиметься як

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (2.9)$$

¹Існує певна невизначеність у знаці при подовженні похідної $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i\eta eA_\mu$, $\eta = \pm 1$. Існує домовленість, що значення η визначається виглядом калібрувально-го перетворення $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\eta\alpha}$.

При таких перетвореннях вільна частина лагранжіана векторного поля, очевидно, не зміниться

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(A_\nu - \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha \right) - \partial_\nu \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) = F_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Чи можемо ми вимагати одночасно з перетвореннями ферміонного поля (2.7) перетворень (2.9) для векторного поля? Відповідь — так, бо перетворення (2.9) є ніщо інше як калібрувальне перетворення векторного поля, що не змінює значень напруженостей електричного ($\vec{E}$) та магнітного полів ($\vec{H}$). Відповідно, перетворення (2.7), (2.9) можна називати *калібрувальними перетвореннями*.

Отже, лагранжіан системи взаємодіючих електрон-позитронного та електромагнітного полів (2.5) є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.11)$$

Порівняно з випадком вільного ферміонного поля інваріантність лагранжіана (2.5) до локальних калібрувальних перетворень стала можливою винятково завдяки наявності в системі калібрувального поля A_μ .

Комбінацію $\partial_\mu - ieA_\mu$ називають подовженою похідною D_μ :

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi. \quad (2.12)$$

Оскільки дія подовженою похідної D_μ на ψ' є тотожною дії ∂_μ :

$$(D_\mu \psi)' = (\partial_\mu - ieA'_\mu)\psi' = e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi = e^{-i\alpha(x)}D_\mu \psi, \quad (2.13)$$

то інваріантність кінетичної частини лагранжіана відносно локальних калібрувальних перетворень є очевидною.

Повністю аналогічні результати можна отримати і в теорії комплексного скалярного поля. Лагранжіан вільного комплексного скалярного поля

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \quad (2.14)$$

не є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень. Вимагаючи його локальну калібрувальну інваріантність ми прийдемо до лагранжіану

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^* D_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

де подовжена похідна $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ визначається аналогічно до (2.12), а лагранжіан є інваріантним до перетворень

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{i\alpha(x)}\phi^*, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.16)$$

Лагранжіан (2.15) також можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \\ & + ie(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) A^\mu + e^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

явно виділивши лагранжіани вільних скалярного та векторного полів, а також доданки їх взаємодії.

З 1954 року, після роботи Чженьїна Янга та Роберта Мілса [35], у фізиці з'явився принцип локальної калібрувальної інваріантності, згідно з яким лагранжіан фізичної теорії повинен бути інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень.

Згідно з цим принципом, лагранжіан (2.1) не є фізичним, отже, у природі діраковські ферміонні поля не можуть існувати окремо у вільному стані, а лише у взаємодії з відповідним векторним калібрувальним полем (2.5).

Фактично, цей принцип визначив процедуру введення в теорію нових калібрувальних полів та опису їх взаємодії з полями матерії. Оскільки у випадку, коли лагранжіан не є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень, потрібно "руками" вводити в теорію додаткові компенсуючі калібрувальні поля.

Щойно ми розглянули найпростіший випадок інваріантності відносно локальних калібрувальних перетворень групи $U(1)$. У цьому випадку компенсуючим є безмасове векторне поле. Безмасовість калібрувального поля вимагається у зв'язку з тим, що масивний доданок векторного поля в лагранжіані $\sim m_v^2 A_\mu A^\mu$ не є інваріантним відносно перетворень (2.11).

У подальшому ми розглянемо інваріантність лагранжіана стосовно локальних калібрувальних перетворень відносно груп відмінних від $U(1)$ та з'ясуємо, до появи яких калібрувальних полів це призведе.

2.2 Теоретико-груповий підхід для опису калібрувальної інваріантності. Фундаментальне представлення

Звернемося тепер до розгляду теоретико-групового підходу інваріантності лагранжіана відносно калібрувальних перетворень неабелевих груп та введення калібрувальних полів у загальному випадку.

Як уже зазначалося, загальна процедура полягає в тому, що спочатку слід указати, яку глобальну симетрію має лагранжіан, а потім, вимагаючи інваріантність лагранжіана відносно локальної симетрії, потрібно ввести калібрувальні компенсуючі поля.

Інваріантність відносно глобальних перетворень

Глобальні симетрії можна охарактеризувати за допомогою певної групи. Якщо лагранжіан має певну глобальну симетрію, то він є інваріантним відносно відповідних перетворень полів.

У якості прикладу найпростішого лагранжіана, що має неабелеву симетрію, можна навести лагранжіан, що складається з N комплексних скалярних полів φ_i ($i = 1 \dots N$):

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi_i^* \partial_\mu \varphi_i - m^2 \varphi_i^* \varphi_i - \lambda (\varphi_i^* \varphi_i)^2. \quad (2.18)$$

Якщо скалярні поля формально об'єднати у вектор-стовпчик

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (\varphi^*)^T = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_N^*), \quad (2.19)$$

то лагранжіан (2.18) запишеться в компактному вигляді

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - \lambda (\varphi^+ \varphi)^2 \quad (2.20)$$

і буде інваріантним відносно глобальних перетворень за *фундаментальним представленням* групи $U(N)$, які за означенням записуються як

$$\varphi \rightarrow \varphi' = w\varphi, \quad \varphi^+ \rightarrow (\varphi')^+ = \varphi^+ w^+, \quad (2.21)$$

де w – довільна унітарна матриця розмірності $N \times N$, чий елементи є постійними величинами $w \neq w(x)$. Як бачимо, поле φ перетворюється за фундаментальним представленням групи $U(N)$, а поле φ^+ – за спряженим до фундаментального представленням групи $U(N)$.

У випадку перетворень (2.21) матимемо

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \partial^\mu \varphi^+ (w^+ w) \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ (w^+ w) \varphi - \lambda (\varphi^+ (w^+ w) \varphi)^2 \equiv \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Отже, лагранжіан (2.20) має симетрію групи $U(N)$, чиїми елементами виступає сукупність унітарних матриць розмірності $N \times N$.

Візьмемо детермінант з лівої та правої частини умови унітарності $UU^+ = 1$ для групи $U(N)$, використавши властивість: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Отримаємо $\det U \det U^+ = |\det U|^2 = 1$, отже, $|\det U| = 1$ та $\det U = e^{i\alpha}$, де α — довільне дійсне число. Таким чином, групу $U(N)$ можна представити як прямий добуток груп $SU(N)$ та $U(1)$.

В Стандартній моделі групі $U(1)$ відповідає калібрувальне поле електромагнітного типу, а, наприклад, групі $SU(2)$ — калібрувальне поле типу Янга-Мілса. Саме тому розглядають окремо симетрії відносно груп $U(1)$ та $SU(N)$ замість симетрії відносно групи $U(N)$. Можна також сказати, що лагранжіан (2.20) має симетрію відносно групи $U(1) \times SU(N)$.

Більш формально, група Лі $U(N)$ не є простою групою, відповідно, згідно з (D1.18), її можна представити через прямий добуток простих груп Лі $U(N) = U(1) \times SU(N)$. Отже, у перетвореннях (2.21) замість матриці w , слід писати $w \rightarrow e^{i\alpha} \omega$, де ω — довільна унітарна матриця розмірності $N \times N$ із одиничним детермінантом ($\omega \in SU(N)$), α — довільна дійсна константа.

Інваріантність відносно локальних перетворень, що описуються простою компактною групою Лі

У даному розділі ми розглянемо інваріантність відносно локальних калібрувальних перетворень для лагранжіана із симетрією, що описується в загальному випадку деякою компактною неабелевою групою Лі, використовуючи загальний теоретико-груповий підхід¹. Зазначимо, що довільну компактну групу Лі (див. (D1.17), (D1.18)) можна представити у вигляді прямого добутку деякої кількості груп $U(1)$ та простих груп Лі.

Для початку розглянемо локальні калібрувальні перетворення відносно простої компактної групи Лі. У якості прикладу розглянемо лагранжіан (2.20) з полем φ , що перетворюється за фундаментальним представленням групи $SU(N)$:

¹В Додатку 2, на прикладі групи $SU(2)$ наведений альтернативний, так званий інфінітезимальний підхід до розгляду цього питання. Однак зазначений підхід є досить громіздким та незручним.

$$\varphi \rightarrow \varphi' = w\varphi, \quad w = w(x) \in SU(N). \quad (2.23)$$

Потенціальні доданки лагранжіана (2.20) залишаються незмінними при перетвореннях (2.23), а кінетичні змінюються. Справді,

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \varphi' = \partial_\mu (w\varphi) = w\partial_\mu \varphi + \partial_\mu w \cdot \varphi. \quad (2.24)$$

Щоб отримати лагранжіан, інваріантний відносно локальних калібрувальних перетворень, нам потрібно таким чином модифікувати похідну $\partial_\mu \varphi \rightarrow D_\mu \varphi$ таким чином, щоб вона перетворювалася так само, як і при глобальних калібрувальних перетвореннях, тобто

$$(D_\mu \varphi)' = w D_\mu \varphi. \quad (2.25)$$

Визначимо модифіковану (подовжену) похідну найпростішим способом

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + A_\mu \varphi, \quad (2.26)$$

де A_μ — поки невідоме поле¹. Тоді

$$\begin{aligned} (D_\mu \varphi)' &= \partial_\mu \varphi' + A'_\mu \varphi' = \partial_\mu (w\varphi) = w\partial_\mu \varphi + \partial_\mu w \cdot \varphi + A'_\mu w\varphi = \\ &= w(\partial_\mu \varphi + A_\mu \varphi) = w D_\mu \varphi. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отже, отримаємо рівняння, що визначає закон зміни поля A_μ при локальних калібрувальних перетвореннях

$$\partial_\mu w + A'_\mu w = w A_\mu. \quad (2.28)$$

Домноживши його з правого боку на w^{-1} , отримаємо

$$A'_\mu = w A_\mu w^{-1} - \partial_\mu w \cdot w^{-1}. \quad (2.29)$$

Взявши похідну від $ww^{-1} = 1$, отримаємо співвідношення $\partial_\mu w \cdot w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1} = 0$, за допомогою якого остаточно запишемо закон перетворення поля A_μ :

$$A'_\mu = w A_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1} = w(A_\mu + \partial_\mu)w^{-1}. \quad (2.30)$$

Слід відзначити, що в неабелевих теоріях у випадку глобальних калібрувальних перетворень компоненти калібрувального поля A_μ змінюються нетривіальним чином: $A'_\mu = w A_\mu w^{-1}$ (перетворюються за

¹Оскільки добуток $A_\mu \varphi$ повинен становити собою стовпчик з N компонент, то поле A_μ повинно мати матричну структуру розмірності $N \times N$.

приєднаним представленням відповідної групи), а у випадку абелевих теорій — залишаються незмінними (2.9).

Розглянемо структуру другого доданка виразу (2.30). Для простоти, розглянемо інфінітезимальні перетворення $w = 1 + i\varepsilon(x)$, де $\varepsilon(x)$ мала величина, що належить алгебрі Лі. Тоді

$$w\partial_\mu w^{-1} = (1 + i\varepsilon)\partial_\mu(1 - i\varepsilon) = -i\partial_\mu\varepsilon.$$

Отже, цей доданок належить алгебрі Лі. Відповідно і перший доданок $wA_\mu w^{-1}$ має належати алгебрі Лі, що можливо лише за умови, коли поле A_μ також належатиме алгебрі Лі¹.

Отже, лагранжіан (2.20) буде інваріантним як відносно локальних перетворень функцій поля матерії (2.23), так і відносно калібрувальних перетворень компенсуючого калібрувального поля A_μ (2.30).

З'ясуємо, яким повинен бути лагранжіан вільного калібрувального поля A_μ за умови, що він буде інваріантним відносно перетворень (2.30), буде подібним до лагранжіана компенсуючого поля групи $U(1)$ (електромагнітного поля) та переходитиме в нього у випадку калібрувальної групи $U(1)$. Нагадаємо, що лагранжіан вільного калібрувального поля групи $U(1)$ має вигляд $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, де $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор Максвелла.

Будемо очікувати, що аналог тензора Максвелла для матричного поля буде містити складові $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Тоді і при глобальних калібрувальних перетвореннях він буде перетворюватися за приєднаним представленням як $F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = wF_{\mu\nu}w^{-1}$, $w \neq w(x)$. Будемо вимагати, щоб цей тензор перетворювався за приєднаним представленням і при локальних калібрувальних перетвореннях.

Для тензора у вигляді $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ наша вимога виконуватися не буде. Справді,

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(wA_\nu w^{-1} + w\partial_\nu w^{-1}) - \partial_\nu(wA_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1}) = \\ &= w(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)w^{-1} + (\partial_\mu wA_\nu w^{-1} - \partial_\nu wA_\mu w^{-1}) + \\ &+ (wA_\nu\partial_\mu w^{-1} - wA_\mu\partial_\nu w^{-1}) + (\partial_\mu w\partial_\nu w^{-1} - \partial_\nu w\partial_\mu w^{-1}) \neq wF_{\mu\nu}w^{-1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

¹Справді, у випадку групи $U(1)$ маємо $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ (2.5), у випадку групи $SU(2)$ маємо $D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau} \cdot \vec{B}_\mu)$ (D2.9). Як бачимо, похідна модифікується за допомогою векторних полів, що належать відповідній алгебрі Лі.

Як бачимо, залишилися доданки, що не містять похідних від поля A_μ , але містять похідні від w . Відповідно ми повинні модифікувати тензор $F_{\mu\nu}$ та додати до нього доданки, які не мають похідних від польових функцій, містять індекси μ, ν та є антисиметричними за їх перестановкою.

Таким доданком є комутатор $[A_\mu, A_\nu]$. При калібрувальних перетвореннях він буде змінюватися як

$$\begin{aligned} [A'_\mu, A'_\nu] &= [wA_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1}, wA_\nu w^{-1} + w\partial_\nu w^{-1}] = w[A_\mu, A_\nu]w^{-1} + \\ &+ w\partial_\mu w^{-1}wA_\nu w^{-1} + wA_\mu w^{-1}w\partial_\nu w^{-1} - w\partial_\nu w^{-1}wA_\mu w^{-1} - \\ &- wA_\nu w^{-1}w\partial_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1}w\partial_\nu w^{-1} - w\partial_\nu w^{-1}w\partial_\mu w^{-1}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Використовуючи (2.31), (2.32), можна перекоонатися, що $F_{\mu\nu}$ у вигляді

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.33)$$

при калібрувальних перетвореннях перетворюється за приєднаним представленням як

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = wF_{\mu\nu}w^{-1}, \quad (2.34)$$

незалежно від того, чи є ці калібрувальні перетворення глобальними, чи локальними. Очевидно, що у випадку калібрувальної групи $U(1)$, коли поле A_μ не має матричної структури, тензор $F_{\mu\nu}$ (2.33) переходить у тензор Максвелла.

Корисно відзначити альтернативний підхід, який базується на тому, що у випадку електродинаміки, або групи $U(1)$, тензор Максвелла виникає у виразі для комутатора подовжених похідних, що діють на поле матерії:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\varphi &= D_\mu(D_\nu\varphi) - D_\nu(D_\mu\varphi) = /D_\mu = \partial_\mu + A_\mu/ = \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\varphi = F_{\mu\nu}\varphi. \end{aligned} \quad (2.35)$$

У випадку, коли лагранжіан є інваріантним відносно неабелевої групи симетрії і поле A_μ є матричним полем, зазначений комутатор автоматично породжує узагальнений тензор Максвелла

$$[D_\mu, D_\nu]\varphi = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])\varphi = F_{\mu\nu}\varphi. \quad (2.36)$$

Отже, лагранжіан вільного матричного калібрувального поля A_μ інваріантний до перетворень поля за приєднаним представленням мо-

же бути записаний у вигляді $\mathcal{L}_A \sim Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]$, бо це скалярна величина, що інваріантна по відношенню до групових перетворень¹. Справді,

$$Tr[F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}] = Tr[wF_{\mu\nu}w^{-1}wF^{\mu\nu}w^{-1}] = Tr[wF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}w^{-1}] = Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}],$$

де останній перехід зобумовлений властивістю операції згортки до циклічних перестановок. Коефіцієнт пропорційності ми визначимо пізніше. Потрібно тепер прояснити фізичний зміст матричного поля.

Оскільки матричне поле A_μ належить відповідній алгебрі Лі, то його можна представити у вигляді

$$A_\mu(x) = -igT^a A_\mu^a(x), \quad (2.37)$$

де g — певна константа (константа зв'язку), T^a — ермітові генератори відповідної групи Лі. Підсумовування за індексом a означає підсумовування за всіма генераторами групи². Для групи $SU(N)$ отримаємо $a \in [1, N^2 - 1]$. Величини A_μ^a є дійсними параметрами та, з фізичної точки зору, становлять собою $N^2 - 1$ "звичайних" (не матричних) нейтральних безмасових векторних полів³.

Аналогічно можна записати матричний тензор $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}(x) = -igT^a F_{\mu\nu}^a(x). \quad (2.38)$$

Знайдемо явний вигляд $F_{\mu\nu}^a$ згідно з визначенням (2.33):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = /(2.37)/ = \\ &= -igT^a \partial_\mu A_\nu^a - (-ig)T^a \partial_\nu A_\mu^a + (-ig)^2 [T^c, T^b] A_\mu^c A_\nu^b = /(D1.7)/ = \\ &= -igT^a [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{cba} A_\mu^c A_\nu^b]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

¹Формально, такий вимозі відповідає і операція взяття детермінанту, але її результатом є добуток, а не сума матричних елементів. Отже введення операції детермінанту однозначно призведе до проблем перенормовності взаємодії, див. Вступ до Розділу 7.

²У формулі (2.37) та в подальшому не потрібно при підсумовуванні по груповим індексам один з індексів опускати, а інший піднімати, бо вони не є лоренцевими індексами і до операцій з ними не можна використовувати метричний тензор.

³У випадку наявності маси m у нейтрального векторного поля лагранжіан повинен містити доданок $\frac{m^2}{2} A_\mu^a A^{\mu,a}$. Однак такий доданок не є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень і є забороненим.

Отже, використавши властивість антисиметричності структурних констант при перестановці індексів (D1.11) та замінивши $b \leftrightarrow c$, отримаємо елементи тензора у зручному для запам'ятовування вигляді

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.40)$$

Повернемося до запису лагранжіана вільного компенсуючого поля A_μ , а саме до визначення множника пропорційності у виразі $\mathcal{L}_A \sim \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]$. Покажемо, що правильний вираз має вигляд

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]. \quad (2.41)$$

Для цього запишемо його через фізичні нейтральні векторні поля (2.38)

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2g^2} (-ig)^2 \text{Tr}[T^a T^b] F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,b} = /(\text{D1.6})/ = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a}, \quad (2.42)$$

тобто, ми отримали лагранжіан вільного компенсуючого поля як суму лагранжіанів (типу лагранжіанів електромагнітного поля) нейтральних векторних полів. Відзначимо також, що у випадку групи $U(1)$, коли $F_{\mu\nu}^a$ відповідає тензору Максвелла, (2.42) відновлює вираз для лагранжіана електромагнітного поля. Зазначимо, що для слабких калібрувальних полів довільної групи симетрії, коли можна знехтувати квадратичними доданками по полях у (2.40), тензор $F_{\mu\nu}^a$ дорівнюватиме тензору Максвелла.

Запишемо остаточно лагранжіан (2.20) у вигляді, що є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень певної компактної простої групи Лі:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D^\mu \varphi)^+ D_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - \lambda (\varphi^+ \varphi)^2 + \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = \\ & = ([\partial^\mu - igT^a A^{a,\mu}] \varphi)^+ [\partial_\mu - igT^{a'} A_\mu^{a'}] \varphi - \\ & - m^2 \varphi^+ \varphi - \lambda (\varphi^+ \varphi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Звернемо увагу, що взаємодія нейтральних векторних полів A_μ^a з полями матерії (скалярними полями) задається константою g , що є спільною для всіх векторних полів, які відповідають певній калібрувальній симетрії лагранжіана.

У випадку, коли лагранжіан є інваріантним відносно перетворень групи $SU(2)$, генераторами групи є $T^a = \tau^a/2$, $a = 1, 2, 3$, де τ^a — матриці Паулі, а структурні константи C^{abc} є символами Леві-Чевіта ϵ^{abc} , див. Додаток 1. Відповідну інваріантність будуть забезпечувати три безмасових нейтральних векторних поля.

У випадку, коли лагранжіан є інваріантним відносно перетворень групи $SU(3)$, генераторами групи є $T^a = \lambda^a/2$, $a = 1, \dots, 8$, де λ^a — матриці Гелл-Манна, а структурні константи $C^{abc} = f^{abc}$ визначаються виразом (D1.42), див. Додаток 1. Відповідну інваріантність будуть забезпечувати вісім безмасових нейтральних векторних полів.

2.3 Теоретико-груповий підхід для опису калібрувальної інваріантності. Приєднане представлення

Розглянемо тепер принципи побудови лагранжіана, що буде мати симетрію до перетворень полів (ξ) за *приєднаним представленням* групи. Він може містити, наприклад, квадратичні за полями доданки типу $\sim \text{Tr}[\xi\xi]$. Справді, згідно з означенням поля за приєднаним представленням перетворюються як $\xi \rightarrow \xi' = g\xi g^{-1}$, відповідно

$$\text{Tr}[\xi'\xi'] = \text{Tr}[g\xi g^{-1}g\xi g^{-1}] = \text{Tr}[g\xi\xi g^{-1}] = \text{Tr}[\xi\xi].$$

Якщо g є елементом групи $SU(N)$, то величина ξ є матрицею $N \times N$ та належить алгебрі Лі. Отже

$$\xi = \sum_a T^a \xi^a, \quad a \in 1, \dots, N^2 - 1, \quad (2.44)$$

отже поле ξ містить $N^2 - 1$ фізичних полів.

Лагранжіан може також містити доданки зі взаємодією поля ξ (містить $N^2 - 1$ фізичних полів) з полем φ , що перетворюється за фундаментальним представленням та містить N фізичних полів, наприклад,

$$\varphi^+ \xi \varphi \rightarrow (\varphi')^+ \xi' \varphi' = \varphi^+ (g^+ g) \xi (g^{-1} g) \varphi = \varphi^+ \xi \varphi.$$

Інваріантність відносно глобальних перетворень

Для прикладу розглянемо лагранжіан взаємодії скалярних полів

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial^\mu \vec{\xi} \partial_\mu \vec{\xi} - M_\varphi^2 \varphi^+ \varphi - \frac{M_\xi^2}{2} \vec{\xi} \vec{\xi} - \lambda \varphi^+ \frac{\vec{\tau} \vec{\xi}}{2}, \quad (2.45)$$

що містить триплет дійсного скалярного поля $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ та двокомпонентний дублет φ . Якщо ввести матричне поле $\xi = \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{\xi}$, що належатиме алгебрі Лі¹, де $\frac{\vec{\tau}}{2}$ — генератори групи $SU(2)$, то лагранжіан (2.45), із урахуванням (D1.6), запишеться у вигляді

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi + \text{Tr}[\partial^\mu \xi \partial_\mu \xi] - M_\varphi^2 \varphi^+ \varphi - M_\xi^2 \text{Tr}[\xi\xi] - \lambda \varphi^+ \xi \varphi, \quad (2.46)$$

що є явно інваріантним до перетворень $\xi \rightarrow \xi' = w\xi w^{-1}$, $\varphi \rightarrow \varphi' = w\varphi$.

¹З точністю до множника $(-i)$.

Тепер, в якості прикладу, розглянемо взаємодію псевдоскалярних полів π -мезонів з ферміонними полями нуклонів. Лагранжіан матиме вигляд¹

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\xi}\partial_\mu\vec{\xi} - M_\Psi\bar{\Psi}\Psi - \frac{M_\xi^2}{2}\vec{\xi}\vec{\xi} - \sqrt{2}\lambda\bar{\Psi}\gamma^5\vec{\tau}\vec{\xi}\Psi, \quad (2.47)$$

де $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ – три нейтральні псевдоскалярні поля однакової маси, Ψ – ізотопічний дублет протона та нейтрона

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\bar{p}, \bar{n}). \quad (2.48)$$

Введемо матричне поле $\xi = \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\xi}$, що належатиме алгебрі Лі. Тоді лагранжіан (2.47) можна записати у вигляді²

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + Tr[\partial^\mu\xi\partial_\mu\xi] - M_\Psi\bar{\Psi}\Psi - M_\xi^2 Tr[\xi\xi] - \sqrt{2}\lambda\bar{\Psi}\gamma^5\xi\Psi. \quad (2.49)$$

Використавши явний вигляд матриць Паулі, отримаємо, див. (4.26),

$$\xi = \frac{\vec{\tau}\vec{\xi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\xi^3}{\sqrt{2}} & \frac{\xi^1 - i\xi^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi^1 + i\xi^2}{\sqrt{2}} & -\frac{\xi^3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Комбінації $\frac{\xi^1 - i\xi^2}{\sqrt{2}}, \xi^3, \frac{\xi^1 + i\xi^2}{\sqrt{2}}$ відповідають ізотопічному триплету псевдоскалярних π^+, π^0 та π^- мезонів, див. додаток 1 у [56]. Тоді можемо записати

$$\bar{\Psi}\gamma^5\frac{\vec{\tau}\vec{\xi}}{\sqrt{2}}\Psi = \pi^0\frac{\bar{p}\gamma^5p - \bar{n}\gamma^5n}{\sqrt{2}} + \pi^+\bar{p}\gamma^5n + \pi^-\bar{n}\gamma^5p \quad (2.51)$$

та лагранжіан (2.47) у вигляді фізичних полів

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{p}\gamma^\mu\partial_\mu p + i\bar{n}\gamma^\mu\partial_\mu n - M_N(\bar{p}p + \bar{n}n) + \\ & + \frac{1}{2}\partial^\mu\pi^0\partial_\mu\pi^0 - \frac{M_\pi^2}{2}\pi^0\pi^0 + \partial^\mu\pi^+\partial_\mu\pi^- - M_\pi^2\pi^+\pi^- - \\ & - \lambda\left(\pi^0\frac{\bar{p}\gamma^5p - \bar{n}\gamma^5n}{\sqrt{2}} + \pi^+\bar{p}\gamma^5n + \pi^-\bar{n}\gamma^5p\right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

¹Оскільки поле піонів псевдоскалярне, то воно повинно взаємодіяти з іншим псевдоскаляром $\bar{\psi}\gamma^5\psi$, щоб їх добуток давав скалярний доданок в лагранжіані.

²В літературі використовують два доданки взаємодії: скалярну $\bar{\Psi}\gamma^5\xi\Psi$ та векторну $\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\xi\Psi$ [55].

Інваріантність відносно локальних перетворень

Розглянемо лагранжіан типу (2.46), а саме

$$\mathcal{L} = Tr[\partial^\mu \xi \partial_\mu \xi] - m^2 Tr[\xi \xi], \quad (2.53)$$

де поле ξ є полем у простій алгебрі Лі, тобто його можна подати у вигляді $\xi = T^a \xi^a$, де T^a — генератори відповідної групи Лі, ξ^a — нейтральні скалярні поля. Оскільки поле належить алгебрі Лі, то при групових перетвореннях воно перетворюється за приєднаним представленням групи Лі. Очевидно, що наведений лагранжіан є явно інваріантним відносно глобальних перетворень типу $\xi \rightarrow \xi' = w \xi w^{-1}$, $w \neq w(x)$.

Розглянемо локальну інваріантність лагранжіана (2.53), а саме припустимо, що $w = w(x)$. У цьому випадку потенціальна частина лагранжіана залишається незмінною, а кінетична частина явно втрачає інваріантність до перетворень.

У Розділі 2.1 ми з'ясували, що проблема локальної калібрувальної інваріантності вирішується за допомогою введення безмасового нейтрального калібрувального векторного поля A_μ , що перетворюється за приєднаним представленням групи Лі, згідно з (2.30), і визначається генераторами відповідної групи Лі (2.37). Наше завдання зараз — модифікувати лагранжіан (2.53) таким чином, щоб його інваріантність відносно локальних калібрувальних перетворень поля

$$\xi(x) \rightarrow \xi'(x) = w(x) \xi w^{-1}(x) \quad (2.54)$$

відновлювалася за допомогою того ж самого векторного поля A_μ .

Щоб зробити це, потрібно модифікувати похідну $\partial_\mu \rightarrow \mathfrak{D}_\mu$ таким чином, щоб

$$\mathfrak{D}_\mu \xi \rightarrow (\mathfrak{D}_\mu \xi)' = w(\mathfrak{D}_\mu \xi) w^{-1}. \quad (2.55)$$

Це дозволить зберегти інваріантність кінетичної частини лагранжіана $Tr[\mathfrak{D}^\mu \xi \mathfrak{D}_\mu \xi] \rightarrow Tr[w \mathfrak{D}^\mu \xi w^{-1} w \mathfrak{D}_\mu \xi w^{-1}] = Tr[\mathfrak{D}^\mu \xi \mathfrak{D}_\mu \xi]$.

Легко перекоонатися, що умову (2.55) задовольняє подовжена похідна, записана за допомогою комутатора матричних полів A_μ та ξ у вигляді (порівняйте з (2.26)):

$$\mathfrak{D}_\mu \xi = \partial_\mu \xi + [A_\mu, \xi]. \quad (2.56)$$

Оскільки поля ξ та A_μ перетворюються за приєднаними представленнями групи Лі, то подовжена похідна (2.56) також буде належати

алгебрі Лі, а отже, можна записати¹:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_\mu \xi &= T^a (\mathfrak{D}_\mu \xi)^a = / \xi = T^a \xi^a, \quad A_\mu = -ig T^b A_\mu^b / = \\ &= T^a \partial_\mu \xi^a + (-ig) [T^b, T^c] A_\mu^b \xi^c = /(\text{D1.7})/ = \\ &= T^a \partial_\mu \xi^a + g C^{abc} T^a A_\mu^b \xi^c, \quad (2.57)\end{aligned}$$

тобто

$$(\mathfrak{D}_\mu \xi)^a = \partial_\mu \xi^a + g C^{abc} A_\mu^b \xi^c. \quad (2.58)$$

Відповідно, лагранжіан, інваріантний до локальних калібрувальних перетворень за приєднанням представленням певної компактної простої групи Лі, матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= Tr[\mathfrak{D}^\mu \xi \mathfrak{D}_\mu \xi] - m^2 Tr[\xi \xi] + \frac{1}{2g^2} Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_\mu \xi)^a (\mathfrak{D}^\mu \xi)^a - \frac{m^2}{2} \xi^a \xi^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi^a + g C^{abc} A_\mu^b \xi^c) (\partial^\mu \xi^a + g C^{ab'c'} A^{\mu, b'} \xi^{c'}) - \frac{m^2}{2} \xi^a \xi^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a}.\end{aligned} \quad (2.59)$$

Як бачимо, навіть у випадку нейтральних полів можна ввести їх взаємодію за допомогою калібрувальних полів. Корисно порівняти даний вираз із виразом (2.43).

Для групи $SU(2)$ лагранжіан скалярного поля в приєднаному представленні описує ізотопічний триплет скалярного поля з ізотопічним спіном $I = 1$. Використавши (2.51) та (4.26), отримуємо

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= Tr[\mathfrak{D}^\mu \xi \mathfrak{D}_\mu \xi] - m^2 Tr[\xi \xi] + \frac{1}{2g^2} Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = \\ &= \left(\frac{\partial_\mu \pi^0}{\sqrt{2}} + ig(\pi^+ W^{-, \mu} - \pi^- W^{+, \mu}) \right) \left(\frac{\partial_\mu \pi^0}{\sqrt{2}} + ig(\pi^+ W_\mu^- - \pi^- W_\mu^+) \right) - \\ &\quad - \frac{(\pi^0)^2}{2} - m^2 \pi^- \pi^+ + \frac{1}{2g^2} Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}], \quad (2.60)\end{aligned}$$

де $W_\mu^\pm = (V_\mu^1 \mp iV_\mu^2)/\sqrt{2}$ – заряджене векторне поле.

¹У загальному записі матричних полів ξ та $\mathfrak{D}_\mu \xi$ через генератори групи, $\xi = g' T^a \xi^a$, $\mathfrak{D}_\mu \xi = g' T^a (\mathfrak{D}_\mu \xi)^a$, константу g' треба покласти одиниці, оскільки її наявність змінить кінетичні доданки фізичних полів до нестандартного вигляду $g'^2 \partial_\mu \xi^a \partial^\mu \xi^a$ або $g'^2 (\mathfrak{D}_\mu \xi)^a (\mathfrak{D}^\mu \xi)^a$. Даній константи можна позбутися перевизначенням норми полів ξ^a .

2.4 Калібрувальна інваріантність відносно перетворень, що описуються непростотою компактною групою L_i

Може статися, що лагранжіан є інваріантним відносно певної групи L_i , що є компактною, але не простою (саме така ситуація й реалізується в лагранжіані Стандартної моделі). Тоді, згідно з (D1.17), (D1.18), дану групу L_i можна представити у вигляді прямого добутку деякої кількості груп $U(1)$ та простих груп L_i . Іншими словами, лагранжіан буде одночасно інваріантним відносно декількох груп L_i .

У цьому випадку, згідно теорії груп L_i , див. Додаток 1, алгебра непростой компактної групи L_i є прямою сумою алгебр простих компактних груп L_i . У матричному представленні це буде відповідати блочно-діагональній матриці з розмірністю, що є сумою розмірностей матриць, складових простих алгебр. Утворена таким чином матриця буде діяти на багатокомпонентний вектор польової функції. В результаті утворюється досить громіздка конструкція.

Значно зручніше польовій функції приписати окремі індекси, що будуть відповідати симетрії відносно однієї з простих груп L_i . При цьому в лагранжіан потрібно включити відповідну кількість компенсуючих полів, які увійдуть в означення подовженої похідної зі своїми певними константами зв'язку та будуть представлені в доданках, що виражають вільні лагранжіани компенсуючих полів.

Проілюструємо сказане на прикладі. Візьмемо за основу лагранжіан (2.20). Припустимо, що він є інваріантним відносно компактної групи L_i G , яку можна представити через прямий добуток двох простих компактних груп L_i $SU(N_A)$ та $SU(N_B)$, тобто $G = SU(N_A) \times SU(N_B)$. Нехай алгебра групи $SU(N_A)$ задається генераторами T^a , $a = 1, \dots, N_A^2 - 1$, а алгебра групи $SU(N_B)$ задається генераторами $T^{\tilde{a}}$, $\tilde{a} = 1, \dots, N_B^2 - 1$. У матричному представленні генератори задаються матрицями розмірностями $N_A \times N_A$ та $N_B \times N_B$ відповідно.

Будемо характеризувати польову функцію φ лагранжіана (2.20) двома груповими індексами, тобто $\varphi \rightarrow \varphi_{i\alpha}$, перший з яких відповідатиме групі $SU(N_A)$ та змінюватиметься в межах від 1 до N_A (позначатимемо латинською літерою), другий — групі $SU(N_B)$ та змінюватиметься в межах від 1 до N_B (позначатимемо грецькою літерою). Щоб не заплутатися в позначеннях, ми явно будемо вказувати межі

підсумовування за груповими індексами.

Відповідно, замість виразу (2.20), слід записати

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{\alpha=1}^{N_B} [(\partial^\mu \varphi)_{i\alpha}^* (\partial_\mu \varphi)_{i\alpha} - m^2 \varphi_{i\alpha}^* \varphi_{i\alpha}] - \lambda \left(\sum_{j=1}^{N_A} \sum_{\beta=1}^{N_B} \varphi_{j\beta}^* \varphi_{j\beta} \right)^2, \quad (2.61)$$

де замість знака ермітового спряження ми поставили знак комплексного спряження, оскільки явно вказано індекси, за якими відбувається підсумовування, і операція транспонування, що входить у визначення операції ермітового спряження, не потрібна.

Уведемо матричні калібрувальні поля, що відповідатимуть групам $SU(N_A)$ та $SU(N_B)$ відповідно:

$$(A_\mu)_{ij} = -ig \sum_{a=1}^{N_A^2-1} T_{ij}^a A_\mu^a, \quad i, j = 1, \dots, N_A \quad (2.62)$$

$$(B_\mu)_{\alpha\beta} = -i\tilde{g} \sum_{\tilde{a}=1}^{N_B^2-1} T_{\alpha\beta}^{\tilde{a}} B_\mu^{\tilde{a}}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N_B \quad (2.63)$$

де g та $\tilde{g}$ — константи зв'язку для полів калібрувальних груп $SU(N_A)$ та $SU(N_B)$ відповідно.

Дані поля діятимуть на польові функції за правилом

$$(A_\mu \varphi)_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{N_A} (A_\mu)_{ij} \varphi_{j\alpha}, \quad (2.64)$$

$$(B_\mu \varphi)_{i\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N_B} (B_\mu)_{\alpha\beta} \varphi_{i\beta}. \quad (2.65)$$

Тобто поле A_μ діє лише на перший індекс польової функції, а поле B_μ — на другий. У результаті дії калібрувальних полів на польову функцію утворюється матриця з двома груповими індексами, перший із яких відповідає групі $SU(N_A)$ та змінюється в межах від 1 до N_A , другий — групі $SU(N_B)$ та змінюється в межах від 1 до N_B .

Уведемо подовжену похідну за аналогією з (2.26), використавши два калібрувальні поля:

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + A_\mu \varphi + B_\mu \varphi = (\partial_\mu + A_\mu + B_\mu) \varphi. \quad (2.66)$$

Розкриємо цей символічний матричний запис:

$$(D_\mu \varphi)_{i\alpha} = \partial_\mu \varphi_{i\alpha} + \sum_{j=1}^{N_A} (A_\mu)_{ij} \varphi_{j\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_B} (B_\mu)_{\alpha\beta} \varphi_{i\beta}. \quad (2.67)$$

Якщо ми захочемо винести польову функцію за дужки, потрібно буде записати

$$(D_\mu \varphi)_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{N_A} \sum_{\gamma=1}^{N_B} (\delta_{ik} \delta_{\alpha\gamma} \partial_\mu + \delta_{\alpha\gamma} (A_\mu)_{ik} + \delta_{ki} (B_\mu)_{\alpha\gamma}) \varphi_{k\gamma}. \quad (2.68)$$

Додавши калібрувальні поля, лагранжіан (2.61) слід модифікувати до вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{\alpha=1}^{N_B} [(D^\mu \varphi)_{i\alpha}^* (D_\mu \varphi)_{i\alpha} - m^2 \varphi_{i\alpha}^* \varphi_{i\alpha}] - \lambda \left(\sum_{j=1}^{N_A} \sum_{\beta=1}^{N_B} \varphi_{j\beta}^* \varphi_{j\beta} \right)^2 - \\ - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^{\tilde{a}} \tilde{F}^{\mu\nu,\tilde{a}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Величини $F_{\mu\nu}^a$ та $\tilde{F}_{\mu\nu}^{\tilde{a}}$ визначаються через поля A_μ^a та $B_\mu^{\tilde{a}}$ стандартним чином, див. (2.40),

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.70)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{\tilde{a}} = \partial_\mu B_\nu^{\tilde{a}} - \partial_\nu B_\mu^{\tilde{a}} + \tilde{g} \tilde{C}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} B_\mu^{\tilde{b}} B_\nu^{\tilde{c}}, \quad (2.71)$$

а C^{cba} та $\tilde{C}^{\tilde{c}\tilde{b}\tilde{a}}$ є структурними константами груп $SU(N_A)$ та $SU(N_B)$ відповідно.

Розглядаючи тему інваріантності відносно локальних калібрувальних перетворень неабелевих груп симетрії, ми використовували лагранжіан скалярного поля, однак так само можна було б розглянути дану тему і на прикладі лагранжіана ферміонного поля. Результат виявився б ідентичним: похідну потрібно подовжувати як $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$: матричне поле змінюється при калібрувальних перетвореннях згідно з (2.30), лагранжіан вільного компенсуючого поля має вигляд (2.41), де $F_{\mu\nu}$ визначається як (2.33) та перетворюється згідно з (2.34).

2.5 Рівняння руху та динамічні інваріанти для неабелевих теорій

У якості прикладу знайдемо рівняння руху для полів лагранжіана (2.43). Щоб зробити це, проваріюємо дію

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left[([\partial^\mu - igT^a A^{\mu,a}] \varphi)^+ [\partial_\mu - igT^{a'} A_\mu^{a'}] \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - \lambda (\varphi^+ \varphi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu,a} F_{\mu\nu}^a \right] \quad (2.72)$$

за тими полями, для яких хочемо отримати рівняння руху.

Рівняння руху для вільних калібрувальних полів

Для спрощення розглянемо спочатку лагранжіан вільного калібрувального поля. У цьому випадку дія має вигляд

$$S_A = \int d^4x \mathcal{L}_A(x) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu,a} F_{\mu\nu}^a \right] \quad (2.73)$$

та є функціоналом векторного поля $S_A = S_A(A, \partial A)$. Знайдемо варіацію дії за векторним полем, див. [57],

$$\begin{aligned} \delta S_A &= S_A(A + \delta A, \partial(A + \delta A)) - S_A(A, \partial A) = \\ &= \int d^4x \delta \mathcal{L}_A(x) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \delta F^{\mu\nu,a} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} F^{\mu\nu,a} \delta F_{\mu\nu}^a \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu,a} \delta F_{\mu\nu}^a, \end{aligned} \quad (2.74)$$

де

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^a &= \delta (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) = \\ &= \partial_\mu \delta A_\nu^a - \partial_\nu \delta A_\mu^a + gC^{abc} \delta A_\mu^b A_\nu^c + gC^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Відповідно, виділивши перший, третій та другий, четвертий доданки, отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta S_A &= -\frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu,a} (\partial_\mu \delta A_\nu^a + gC^{abc} \delta A_\mu^b A_\nu^c) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu,a} (-\partial_\nu \delta A_\mu^a + gC^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Врахувавши, що індекси при підсумовуванні можна перепозначити, а також антисиметрію тензорів $F_{\mu\nu}^a$ та C^{abc} (D1.11), отримуємо, що другий рядок дорівнюватиме першому:

$$\begin{aligned} -F^{\mu\nu,a}\partial_\nu\delta A_\mu^a &= / \mu \leftrightarrow \nu / = -F^{\nu\mu,a}\partial_\mu\delta A_\nu^a = F^{\mu\nu,a}\partial_\mu\delta A_\nu^a, \\ F^{\mu\nu,a}C^{abc}A_\mu^b\delta A_\nu^c &= / b \leftrightarrow c, \mu \leftrightarrow \nu / = F^{\nu\mu,a}C^{acb}A_\nu^c\delta A_\mu^b = F^{\mu\nu,a}C^{abc}A_\nu^c\delta A_\mu^b. \end{aligned}$$

Отже, вираз для варіації дії набуде вигляду

$$\delta S_A = - \int d^4x F^{\mu\nu,a}(\partial_\mu\delta A_\nu^a + gC^{abc}\delta A_\mu^b A_\nu^c). \quad (2.77)$$

Виконаємо інтегрування за частинами в першому доданку

$$\int d^4x F^{\mu\nu,a}\partial_\mu\delta A_\nu^a = - \int d^4x \partial_\mu F^{\mu\nu,a}\delta A_\nu^a, \quad (2.78)$$

де ми використали те, що, згідно з принципом стаціонарної дії, варіація функцій на межах інтегрування (поверхні інтегрування) дорівнює нулю.

Змінімо індекси підсумовування в другому доданку

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu,a}C^{abc}\delta A_\mu^b A_\nu^c &= / a \leftrightarrow b, \mu \rightarrow \nu / = F^{\mu\nu,b}C^{abc}\delta A_\nu^a A_\mu^c = / b \leftrightarrow c / = \\ &= -C^{abc}A_\mu^b F^{\mu\nu,c}\delta A_\nu^a. \end{aligned} \quad (2.79)$$

У результаті запишемо (2.77) як

$$\delta S_A = \int d^4x (\partial_\mu F^{\mu\nu,a} + gC^{abc}A_\mu^b F^{\mu\nu,c}) \delta A_\nu^a. \quad (2.80)$$

Згідно з принципом стаціонарної дії, варіація дії за польовими функціями повинна дорівнювати нулю, що буде виконуватися за умови

$$\partial_\mu F^{\mu\nu,a} + gC^{abc}A_\mu^b F^{\mu\nu,c} = 0, \quad (2.81)$$

яка і становить рівняння руху для вільних калібрувальних полів.

Зазначимо, що оскільки $F_{\mu\nu}$ є тензорною величиною, яка перетворюється за приєднаним представленням групи Лі, то подовжена похідна діє на $F_{\mu\nu}$ за законом (2.57), (2.58). У результаті рівняння руху (2.81) можна записати у вигляді, подібному до рівнянь Максвелла для вільного електромагнітного поля:

$$(\mathfrak{D}_\mu F^{\mu\nu}(x))^a = 0, \quad \text{або} \quad \mathfrak{D}_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (2.82)$$

Звертаємо увагу на те, що оскільки величина $F^{\mu\nu}$ містить квадратичні доданки за полем A_μ , то рівняння руху будуть нелінійними, а саме: будуть містити квадратичні та кубічні доданки калібрувальних полів. Це і є основна відмінність рівнянь для калібрувальних полів у неабелевих теоріях поля від аналогічних рівнянь в абелевих теоріях.

Рівняння руху для калібрувальних полів

Щоб отримати рівняння руху для калібрувальних полів, що взаємодіють із іншими полями (наприклад, згідно з лагранжіаном (2.43)), проваріюємо за калібрувальними полями відповідну дію (2.72)

$$\delta_A S = \delta S_A + \int d^4x [\delta_A([D_\mu\varphi]^+)D^\mu\varphi + [D_\mu\varphi]^+\delta_A D^\mu\varphi], \quad (2.83)$$

де ми врахували, що варіація за калібрувальними полями від інших доданків лагранжіана (2.43) дорівнює нулю.

Враховуючи (2.80) та

$$\delta_A D_\mu\varphi = \delta_A([\partial_\mu - igT^a A_\mu]\varphi) = -igT^a\varphi\delta A_\mu^a; \quad (2.84)$$

$$\delta_A(D_\mu\varphi)^+ = \delta_A[\partial_\mu\varphi^+ + ig\varphi^+T^a A_\mu] = +ig\varphi^+T^a\delta A_\mu^a; \quad (2.85)$$

отримаємо

$$\delta S = \int d^4x ((\mathfrak{D}_\mu F^{\mu\nu})^a + ig(\varphi^+T^a D^\nu\varphi - [D^\nu\varphi]^+T^a\varphi))\delta A_\nu^a = 0. \quad (2.86)$$

Позначивши комбінацію

$$-i(\varphi^+T^a D^\nu\varphi - [D^\nu\varphi]^+T^a\varphi) = j^{\nu,a} \quad (2.87)$$

за струм, який є аналогом струму в абелевій теорії для зарядженого скалярного поля

$$j^\nu = -i(\varphi^+D^\nu\varphi - [D^\nu\varphi]^+\varphi), \quad \text{де} \quad D^\nu\varphi = (\partial^\nu - ieA^\nu)\varphi,$$

із рівняння (2.86) ми отримаємо рівняння руху для калібрувального векторного поля у вигляді

$$(\mathfrak{D}_\mu F^{\mu\nu})^a = gj^{\nu,a}, \quad (2.88)$$

що є подібним до рівнянь Максвелла для електромагнітного поля $\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu$.

Щоб не було плутанини, запишемо рівняння (2.88) в явному вигляді

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu,a} + C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu,c} = \\ = -ig \{ \varphi^+ T^a (\partial^\nu - ig T^b A^{\nu,b}) \varphi - [(\partial^\nu - ig T^c A^{\nu,c}) \varphi]^+ T^a \varphi \}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Рівняння руху для скалярного поля

Рівняння руху для скалярного поля φ отримується шляхом варіювання дії (2.72) за ермітово-спряженою функцією скалярного поля¹ φ^+ . Маємо

$$\delta_{\varphi^+} S = \int d^4x \left[\delta_{\varphi^+} ([D_\mu \varphi]^+) D^\mu \varphi - m^2 \delta \varphi^+ \varphi - 2\lambda (\varphi^+ \varphi) \delta \varphi^+ \varphi \right], \quad (2.90)$$

де ми врахували, що варіація за полем φ^+ від інших доданків лагранжіана (2.43) дорівнює нулю.

Враховуючи, що

$$\delta_{\varphi^+} (D_\mu \varphi)^+ = \delta_{\varphi^+} [\partial_\mu \varphi^+ + ig \varphi^+ T^a A_\mu^a] = \partial_\mu \delta \varphi^+ + ig \delta \varphi^+ T^a A_\mu^a \quad (2.91)$$

отримаємо

$$\delta_{\varphi^+} S = \int d^4x \left[(\partial_\mu \delta \varphi^+ + ig \delta \varphi^+ T^a A_\mu^a) D^\mu \varphi - m^2 \delta \varphi^+ \varphi - 2\lambda (\varphi^+ \varphi) \delta \varphi^+ \varphi \right]. \quad (2.92)$$

Інтегрування за частинами першого доданку дозволяє винести за дужки варіацію поля

$$\delta_{\varphi^+} S = \int d^4x \delta \varphi^+ \left[(-\partial_\mu + ig T^a A_\mu^a) D^\mu \varphi - m^2 \varphi - 2\lambda (\varphi^+ \varphi) \varphi \right] \quad (2.93)$$

і записати рівняння руху на поле матерії:

$$(\partial^\mu - ig T^a A^{\mu,a}) D_\mu \varphi + m^2 \varphi + 2\lambda (\varphi^+ \varphi) \varphi = 0. \quad (2.94)$$

¹ І навпаки, рівняння руху для ермітово-спряженого поля φ^+ отримується шляхом варіювання дії (2.72) за функцією скалярного поля φ .

Оскільки величина $D_\mu\varphi$ при калібрувальних перетвореннях перетворюється за фундаментальним представленням групи Лі, то подовжена похідна діє на $D_\mu\varphi$ так само, як і на польову функцію φ . Отже, (2.94) можна записати у вигляді, подібному до запису рівняння Клейна-Гордона для скалярного поля в неабелевих теоріях, а саме:

$$D^\mu D_\mu\varphi + \frac{\partial V(|\varphi|^2)}{\partial\varphi^+} = 0, \quad (2.95)$$

де $V(|\varphi|^2) = m^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4$ — потенційна частина лагранжіана (2.43), а $|\varphi|^2 = \varphi^+\varphi$.

Щоб не було плутанини, запишемо рівняння (2.94) в явному вигляді

$$(\partial^\mu - igT^a A^{\mu,a})[\partial_\mu\varphi - igT^b A_\mu^b\varphi] + m^2\varphi + 2\lambda(\varphi^+\varphi)\varphi = 0. \quad (2.96)$$

Тензор енергії-імпульсу в неабелевих теоріях

Цікаво отримати вираз для тензору енергії-імпульсу вільних калібрувальних полів у неабелевих теоріях поля та порівняти його з випадком електромагнітного поля. Щоб зробити це, можна або використати теорему Ньотер для дії (2.73) і потім штучно симетризувати отриманий тензор [56], або відразу отримати правильний результат, провівши варіювання дії (2.73) у формі

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{\kappa\lambda}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (2.97)$$

за метричним тензором $g_{\mu\nu}$ [58].

Зрозуміло, що при варіюванні за метрикою внутрішня структура тензорів $F_{\mu\nu}^a$ не є важливою, і ми отримаємо результат, аналогічний результату в електродинаміці [59], але з появою підсумовування за груповим індексом a :

$$T_{\mu\nu}^A = -F_{\mu\lambda}^a F_\nu^{\lambda,a} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}^a F^{\lambda\rho,a}. \quad (2.98)$$

Зокрема, просторова густина енергії калібрувальних полів буде

$$T_{00}^A = -F_{0\lambda}^a F_0^{\lambda,a} + \frac{1}{4} F_{\lambda\rho}^a F^{\lambda\rho,a} = - \left(F_{00}^a F^{00,a} + \sum_{i=1}^3 F_{0i}^a F^{0i,a} \right) + \frac{1}{4} \left(F_{00}^a F^{00,a} + \sum_{i=1}^3 (F_{0i}^a F^{0i,a} + F_{i0}^a F^{i0,a}) + \sum_{i,j=1}^3 F_{ij}^a F^{ij,a} \right). \quad (2.99)$$

Врахуємо, що тензор $F_{\mu\nu}^a$ є антисиметричним за лоренцовими індексами (нульовий при однакових індексах) та при опусканні (підніманні) одного просторового індексу змінює знак $F_{0i}^a = -F^{0i,a}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} T_{00}^A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 F_{0i}^a F_{0i}^a + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 F_{ij}^a F_{ij}^a = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} F_{0i}^a F_{0i}^a + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j, i < j)}}^3 \frac{1}{2} F_{ij}^a F_{ij}^a. \end{aligned} \quad (2.100)$$

За аналогією з тензором Максвелла в електродинаміці позначимо компоненти тензора $F_{\mu\nu}^a$ як

$$F_{\mu\nu}^a = \begin{pmatrix} 0 & -E_x^a & -E_y^a & -E_z^a \\ E_x^a & 0 & H_z^a & -H_y^a \\ E_y^a & -H_z^a & 0 & H_x^a \\ E_z^a & H_y^a & -H_x^a & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

де H_i^a, E_i^a — неабелеві аналоги магнітного та електричних полів. Відзначимо, що для неабелевих калібрувальних полів малої інтенсивності, коли добуток польових функцій $A_\mu^b A_\nu^c$ є набагато меншим за саму польову функцію $A_\mu^b A_\nu^c \ll A_\mu^c$, тензор $F_{\mu\nu}^a \simeq \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ стає повністю аналогічним тензору Максвелла, і аналогія між електричними і магнітними полями в електродинаміці стає повною.

У позначеннях (2.101) просторова густина енергії калібрувальних полів буде мати вигляд

$$T_{00}^A = \frac{1}{2} [\vec{E}^a \vec{E}^a + \vec{H}^a \vec{H}^a], \quad (2.102)$$

що є подібним до густини енергії електромагнітного поля.

Тензор енергії-імпульсу скалярного поля буде мати вигляд аналогічний до його вигляду в абелевій теорії

$$T_{\mu\nu}^{\varphi} = (D_{\mu}\varphi)^+ D_{\nu}\varphi + (D_{\nu}\varphi)^+ D_{\mu}\varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\varphi}, \quad (2.103)$$

де

$$\mathcal{L}_{\varphi} = (D^{\mu}\varphi)^+ (D_{\mu}\varphi) - V(|\varphi|^2). \quad (2.104)$$

У метриці (0.1) просторова густина енергії матиме вигляд

$$T_{00}^{\varphi} = \sum_{\mu=0}^3 (D_{\mu}\varphi)^+ (D_{\mu}\varphi) + V(|\varphi|^2). \quad (2.105)$$

Тензор енергії-імпульсу системи скалярних та калібрувальних полів буде

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^A + T_{\mu\nu}^{\varphi}. \quad (2.106)$$

Зокрема, повна енергія системи, що задається лагранжіаном (2.43), визначається як

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\vec{E}^a \vec{E}^a + \vec{H}^a \vec{H}^a] + \sum_{\mu=0}^3 (D_{\mu}\varphi)^+ (D_{\mu}\varphi) + V(|\varphi|^2) \right]. \quad (2.107)$$

РОЗДІЛ 3

Спонтанне порушення симетрії. Генерація маси калібрувальних полів

Вступ

Розглянутий у попередньому розділі принцип локальної калібрувальної інваріантності, фактично, є механізмом коректного введення калібрувальних полів, що відповідають за взаємодію між частинками. Згідно з цим принципом калібрувальні поля мають бути безмасовими полями (масивні доданки є пропорційними $\sim A_\mu A^\mu$, що явно порушує калібрувальну інваріантність).

Як відомо з експериментальних даних, переносники електромагнітної взаємодії (фотони) є безмасовими частинками, і це формально узгоджується з результатами попереднього розділу. Однак, напряму застосувати принцип локальної калібрувальної інваріантності до опису процесів слабкої взаємодії не вийде. Цьому є дві причини. По-перше, переносники слабкої взаємодії ($W^\pm, Z$ бозони) є масивними. Якщо ми штучним чином введемо масивні векторні частинки в теорію, це порушить її локальну калібрувальну інваріантність та може призвести до її неперенормовності. По-друге, щоб застосувати принцип спонтанного порушення симетрії до реальних фізичних систем, вони мають містити тотожні поля (частинки), що мають перетворюватися згідно певної групи симетрії. Зокрема зазначені частинки мають бути з однаковими масами. Однак елементарні частинки матерії (електрон, мюон, нейтрино тощо) мають відмінні маси.

Виявляється, що наведені складнощі можна подолати і принцип локальної калібрувальної інваріантності можна застосовувати до опису реальних фізичних систем з масивними переносниками взаємодії за умови наявності у них скалярного поля (або декількох полів), для

якого може відбутися явище *спонтанного порушення симетрії*, тобто, коли його основний стан (стан з найменшою енергією) реалізуватиметься для ненульового сталого значення його польової функції. При цьому основний стан системи матиме меншу симетрію ніж симетрія початкової системи.

Забігаючи наперед можна сказати, що після спонтанного порушення симетрії взаємодія скалярного поля з частинками матерії останні можуть отримати масу. Відповідно до того моменту, як у системі відбудеться спонтанне порушення симетрії ми матимемо тотожні безмасові частинки матерії і, згідно з принципом локальної калібрувальної інваріантності, можна буде коректно ввести безмасові калібрувальні поля. Після того, як у системі відбудеться спонтанне порушення симетрії ми отримаємо масивні частинки матерії, а калібрувальні поля набудуть маси завдяки їх взаємодії зі скалярним полем¹. Важливо відзначити, що у 1971 році Герард т'Хофт теоретично показав, що теорії з локальною калібрувальною інваріантністю та зі спонтанним порушенням симетрії (або без порушення симетрії) є перенормовними, див. §11.2, [?]

Системи з можливим спонтанним порушенням симетрії не є якимось екзотичними, з ними можна зустрітися і в повсякденному житті. Наприклад, уявімо собі скляну пляшку з опуклим дном, що стоїть на столі. Вона має симетрію відносно обертання навколо вісі, що проходить вертикально через центр пляшки. Тепер кинемо в цю пляшку маленьку кульку — вона опиниться в довільній точці на дні круглого жолобка. Всі точки на дні жолобка будуть для неї рівноймовірними. Але якщо розглядати пляшку з кулькою на дні, то дана система вже не матиме симетрії відносно обертання — в ній буде виділена точка. Точка ж симетрією відносно обертання знаходитиметься на вершині опуклого дна, але кулька в цій точці матиме більшу потенційну енергію, аніж в точці з порушеною симетрією в жолобку. Якщо ми обережно помістимо кульку на вершину жолобка, то кулька опиниться в стані нестійкої рівноваги і намагатиметься перейти в стан з

¹Механізм отримання маси калібрувальними полями завдяки їх взаємодії зі скалярним полем отримав назву *механізма Хіггса*. Він був запропонований у 1964 році Пітером Хіггсом [36, 37] та, незалежно, Робертом Браутом і Франсуа Енглера [38], а також Джеральдом Гуральником, Карлом Гагеном та Томом Кібблом [39]. Даний механізм забезпечує появу маси калібрувальних полів та не суперечить принципу локальної калібрувальної інваріантності.

найменшою енергією, але порушеною симетрією на дні жолобка.

Іншим прикладом слугує теорія феромагнетизму поблизу температури Кюрі T_C . Суть явища полягає у тому, що при температурі $T > T_C$ магнітні диполі у речовині орієнтовані довільним чином і намагніченість у речовині відсутня, при $T < T_C$ магнітні диполі орієнтуються вздовж одного довільного напрямку і речовина отримує намагніченість. Пояснення явища було запропоновано Віталієм Гінзбургом та Левом Ландау у 1950 році, див. §5.3, [60]. Вони припустили, що поблизу точки Кюрі намагніченість $\vec{M}$ є малою, і вільну енергію можна записати (розкласти в ряд) нехтуючи високими ступенями вектора $\vec{M}$. Тоді

$$u(\vec{M}) = (\partial_i \vec{M})^2 + V(\vec{M}), \quad V(\vec{M}) = \alpha_1(T) (\vec{M} \cdot \vec{M}) + \alpha_2 (\vec{M} \cdot \vec{M})^2, \quad (3.1)$$

де $\alpha_1(T) = \alpha(T - T_C)$, $\alpha > 0$, $\alpha_2 > 2$. Основний стан реалізується для мінімуму вільної енергії, тобто коли доданок $(\partial_i \vec{M})^2$ є малим та величина $V(\vec{M})$ досягає свого мінімуму, що знаходиться з умови $\frac{\partial V}{\partial M_i} = 0$, тобто

$$\vec{M}(\alpha_1 + 2\alpha_2(\vec{M} \cdot \vec{M})) = 0. \quad (3.2)$$

При $T > T_C$, $\alpha_1 > 0$ реалізується стан $\vec{M} = 0$. При $T < T_C$, $\alpha_1 < 0$ основний стан системи реалізується при ненульовій намагніченості $|\vec{M}| = \sqrt{-\alpha_1/2\alpha_2}$. Однак напрямок вектора $\vec{M}$ визначається довільним чином. Своєю появою вектор намагніченості порушує симетрію системи з початкової симетрії сфери (симетрія групи $SO(3)$) до симетрії відносно поворотів навколо вісі, що проходить вздовж вектора намагніченості (симетрія групи $SO(2)$).

У даному розділі ми розглянемо на конкретних прикладах, яким чином відбувається спонтанне порушення симетрії в польових моделях, та як саме реалізується механізм Хіггса.

3.1 Спонтанне порушення дискретної симетрії

Розглянемо нейтральне скалярне поле з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi), \quad (3.3)$$

де потенціал заданий виразом

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4. \quad (3.4)$$

Такий вибір потенціалу обумовлений, по-перше, тим, що в нашому (3+1)-вимірному просторі теорія скалярного поля з потенціалом, який містить доданки $\sim \varphi^n$ (де $n > 4$), є неперенормовною і, відповідно, нефізичною; по-друге, потенціал, що розглядається, має інваріантність до дискретних перетворень $V(\varphi) = V(-\varphi)$.

Потенціал (3.4), очевидно, має симетрію відносно дискретних перетворень

$$\varphi \rightarrow -\varphi. \quad (3.5)$$

Залежно від знаків параметрів λ, μ , поведінка потенціалу представлена на Рис. 2.

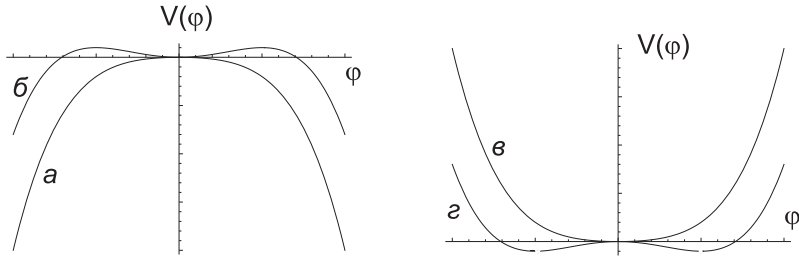


Рис. 2: Різні форми потенціальної частини лагранжіана. По вісі ординат відкладено потенціал $V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4$, у якому: а) $\mu^2, \lambda < 0$, б) $\mu^2 > 0, \lambda < 0$, в) $\mu^2, \lambda > 0$, г) $\mu^2 < 0, \lambda > 0$. По вісі абсцис відкладено значення польової функції φ .

Із явного виду лагранжіана (3.3) впливає рівняння руху для скалярного нейтрального поля

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \varphi = 0, \quad (3.6)$$

тобто,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2 + \lambda \varphi^2) \varphi = 0. \quad (3.7)$$

та вираз для знаходження енергії такого поля

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \varphi)^2 + V(\varphi) \right]. \quad (3.8)$$

Основний стан системи визначається конфігурацією поля, за якої енергія системи є мінімальною. Очевидно, що мінімум енергії досягатиметься при часово- та просторово-однорідних розв'язках. У цьому випадку основний стан системи визначатиметься функцією $V(\varphi)$:

$$E = \int d^3x V(\varphi). \quad (3.9)$$

Для несуперечливості умови однорідності з рівнянням руху (3.6) повинна виконуватися умова $\partial V / \partial \varphi = 0$, що і є умовою мінімуму потенціалу $V(\varphi)$.

Вираз (3.9) для енергії основного стану відразу накладає обмеження на значення параметра λ потенціалу $V(\varphi)$. λ повинно бути позитивним, оскільки для $\lambda < 0$ при великих значеннях поля φ потенціал стане негативним (див. Рис. 2 а, б), і система буде прямувати до стану з найменшою енергією $E \rightarrow -\infty$ при $\varphi \rightarrow \infty$. Ця ситуація є нефізичною, оскільки основний стан системи не буде характеризуватися певним, фіксованим, скінченим значенням енергії. Відповідно, варіанти а, б з Рис. 2 потрібно відкинути і слід покласти $\lambda > 0$.

Розглянемо варіант $\mu^2 > 0$, $\lambda > 0$. В цьому випадку поведінка потенціалу залежно від значення польової функції наведена на Рис. 2в. Основний стан системи буде знаходитися в точці мінімуму потенціалу, тобто в $V = 0$ при $\varphi = 0$. Параметр μ можна трактувати як масу кванта скалярного поля, а додатній параметр λ – як параметр, що характеризує відштовхування між квантами поля¹.

Відхилення системи від основного стану описується тим самим полем φ . Лагранжіан для відхилень співпадає з початковим лагранжіаном і також має інваріантність відносно перетворень (3.5), отже, ніякого порушення симетрії тут не відбувається.

¹Притягування між квантами поля призводило б до зменшення енергії системи. Доданок $\sim \lambda \varphi^4$ призводить лише до збільшення енергії (3.9).

Розглянемо варіант $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$. Зробивши відповідні перепозначення, запишемо потенціал для цього випадку як

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \quad (3.10)$$

Поведінка потенціалу залежно від значення польової функції наведена на Рис. 2г. Основний стан системи буде знаходитися в точці мінімуму потенціалу, значення якої легко отримати з умови

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = (-\mu^2 + \lambda\varphi^2)\varphi = 0. \quad (3.11)$$

Отже, мінімум потенціалу, а значить і основний стан системи, досягається у двох цілком рівноправних точках¹

$$\varphi = \pm\varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (3.12)$$

у яких потенціал та повна енергія системи набувають найменших значень

$$V(\pm\varphi_0) = -\frac{\lambda}{4}\varphi_0^4, \quad E = V(\pm\varphi_0) \cdot \Omega, \quad (3.13)$$

де Ω — об'єм системи. Основний стан системи став виродженим.

У якій із двох можливих точок ($\varphi = \pm\varphi_0$) система буде знаходитися в основному стані, визначається спонтанним чином. Інтуїтивно це можна зрозуміти з Рис. 3, якщо припустити, що система спочатку знаходилася в точці $\varphi = 0$, а потім скотитися у стан із найменшою енергією або ліворуч, або праворуч.

Зазначимо: якщо система зайняла основний стан в одній із точок, наприклад 2, то для переходу в точку 3 їй слід переміститися через точку 1. А для цього потрібно змінити енергію у всьому об'ємі (Ω), що займає система, на величину

$$\Delta E = [V(\varphi = 0) - V(-\varphi_0)]\Omega = \frac{\lambda}{4}\varphi_0^4 \cdot \Omega. \quad (3.14)$$

¹Корисно відзначити, що наявність кубічного доданка в потенціалі (3.10) призвела б до появи двох точок мінімуму з різними значеннями потенціалу у них, а ми намагаємося побудувати теорію, де всі точки основного стану є рівноправними. У протилежному випадку, стан системи у точці з більшим значенням потенціалу буде метастабільним: при невеликих збуреннях система залишатиметься у даному стані, при великих збуреннях – система перейде до стану з меншою енергією.

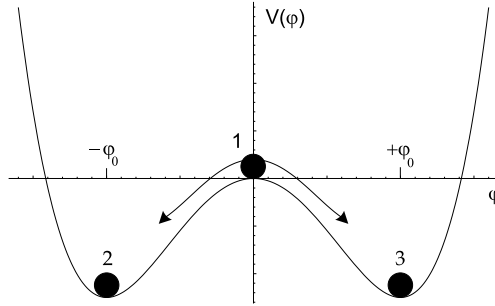


Рис. 3: Ілюстрація спонтанного вибору однієї з двох точок, що відповідають основному стану системи.

Якщо в якості системи розглядати Всесвіт, то такі переходи важко здійснити ($\Omega \rightarrow \infty$). Отже, обравши певну точку мінімуму, система буде в ній знаходитися і в подальшому. Якщо ж об'єм системи є невеликим, то можуть існувати тунельні переходи між різними точками основного стану. Надалі ми вважатимемо, що система займає великий об'єм.

Перш ніж рухатися далі, перепишемо лагранжіан (3.3) у зручному для нас вигляді. Як відомо, додавання до лагранжіана довільної константи не змінює фізичних наслідків теорії, якщо не цікавитися гравітаційними ефектами. Тому віднімемо від лагранжіана константу $V(\varphi_0)$, щоб основному стану відповідало нульове значення потенціалу

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \varphi_0^2)^2. \quad (3.15)$$

Тепер, замість параметрів λ, μ , що характеризували потенціал (3.10), зручно перейти до параметрів λ, φ_0 .

Сама по собі система в основному стані не є спостережуваною. Спостереження пов'язане зі зміною фізичних величин. Тому розглянемо збурення над основним станом системи, наприклад, в околі точки $\varphi = +\varphi_0$, а саме, коли $\varphi = \varphi_0 + \chi$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\varphi_0 + \chi) &= \frac{1}{2} \partial_\nu \chi \partial^\nu \chi - \frac{\lambda}{4} ((\varphi_0 + \chi)^2 - \varphi_0^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\nu \chi \partial^\nu \chi - \frac{2\varphi_0^2 \lambda}{2} \chi^2 - \varphi_0 \lambda \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4, \quad (3.16)\end{aligned}$$

де ми залишили кінетичні доданки. Оскільки в точці $\varphi = \varphi_0 + \chi$ потенціал $V(\varphi)$ вже не знаходиться у своєму мінімумі $\partial V / \partial \varphi \neq 0$, то для узгодження з рівнянням руху (3.6) поле χ має містити координатну залежність $\chi = \chi(x)$. У зв'язку з тим, що розглядаються малі збурення навколо точки мінімуму потенціалу, необхідно додатково накласти умову $\chi \ll f_0$, що забезпечує значення потенціалу в межах правої западини потенціалу, див. Рис. 3.

Як бачимо, лагранжіан поля χ (3.16) суттєво відрізняється від лагранжіана поля φ . По-перше, поле χ стало масивним полем¹ із масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$, по-друге, в лагранжіані з'явилися кубічні за полем доданки, тобто лагранжіан поля χ не має симетрії відносно перетворень $\chi \rightarrow -\chi$.

Таким чином, ми явно спостерігаємо порушення симетрії в околі основного стану системи. Якщо дві точки основного стану $\pm\varphi_0$ є цілком рівноправними, і система довільним (спонтанним) чином обирає, в якій точці вона буде знаходитися, то таке порушення симетрії називають спонтанним порушенням симетрії.

На завершення відзначимо, що поява маси у поля χ є передбачуваною, оскільки потенціал (3.10) у безпосередньому околі точок $\pm\varphi_0$ зростає згідно з квадратичним законом, і відповідний коефіцієнт при χ^2 є позитивним. Для порівняння: поле φ в околі точки $\varphi = 0$ спадає згідно з квадратичним законом, і відповідний коефіцієнт при χ^2 є негативним, див. Рис. 3.

3.2 Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $U(1)$

За аналогією з попереднім випадком, розглянемо лагранжіан зарядженого скалярного поля, що має інваріантність відносно глобальних перетворень групи $U(1)$ та має потенціал, подібний до (3.10):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|^2), \quad (3.17)$$

¹Поле φ не можна назвати масивним полем, оскільки, формально, згідно з потенціалом (3.10), маса кванта поля є уявною $m_\varphi = i\mu$.

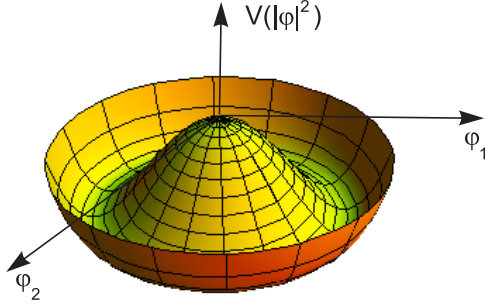


Рис. 4: Ілюстрація поведінки потенціалу (3.18).

де $|\varphi|^2 = \varphi^* \varphi$, а потенціал заданий виразом

$$V(|\varphi|^2) = -\mu^2 |\varphi|^2 + \lambda (|\varphi|^2)^2. \quad (3.18)$$

Поведінка потенціалу (3.18) проілюстрована на Рис. 4, де враховано, що комплексну функцію φ можна представити за допомогою двох дійсних функцій $\varphi_{1,2}$:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad |\varphi|^2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2}. \quad (3.19)$$

Лагранжіан (3.17), очевидно, має інваріантність відносно глобальних перетворень групи $U(1)$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\alpha} \varphi; \quad \varphi^* \rightarrow \varphi'^* = \varphi^* e^{-i\alpha}, \quad (3.20)$$

або, мовою дійсних функцій, відносно перетворень, що зберігають суму квадратів функцій $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \text{const}$, тобто відносно перетворень поворотів:

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi'_1 = \varphi_1 \cos \delta - \varphi_2 \sin \delta; \quad (3.21)$$

$$\varphi_2 \rightarrow \varphi'_2 = \varphi_1 \sin \delta + \varphi_2 \cos \delta. \quad (3.22)$$

Із явного вигляду лагранжіана (3.17) випливає рівняння руху для скалярного нейтрального поля

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{\partial V}{\partial |\varphi|^2} \right) \varphi = 0, \quad (3.23)$$

тобто

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2 + 2\lambda|\varphi|^2) \varphi = 0, \quad (3.24)$$

та вираз для енергії поля

$$E = \int d^3x \left[\sum_{\mu=0}^3 (\partial_\mu \varphi)^* (\partial_\mu \varphi) + V(|\varphi|^2) \right]. \quad (3.25)$$

Основний стан системи, як і у випадку нейтрального поля, буде визначатися однорідним, стаціонарним розв'язком. Енергія основного стану буде визначатися мінімумом потенціалу, див. (3.23),

$$\frac{\partial V}{\partial |\varphi|^2} = -\mu^2 + 2\lambda|\varphi|^2 = 0, \quad (3.26)$$

який буде реалізований у нескінченній множині значень φ_1, φ_2 , що знаходитимуться на колі радіуса μ^2/λ в жолобку, в найнижчій частині Рис. 4:

$$|\varphi|^2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{\varphi_0^2}{2}. \quad (3.27)$$

Отже, основний стан системи знову є виродженим. Як бачимо, потенціал (3.18) є узагальненням потенціалу (3.10) і отримується шляхом обертання останнього. При цьому, якщо система опинилася в певному основному стані, то її перехід в інший основний стан за кінцевий проміжок часу є малоймовірним за рахунок кінетичного доданку в енергії системи, оскільки для такого переходу слід витратити енергію

$$\Delta E = \frac{\Delta \varphi^*}{\Delta T} \frac{\Delta \varphi}{\Delta T} \Omega, \quad (3.28)$$

де Ω – об'єм системи ($\Omega \rightarrow \infty$). Отже, обравши певну точку мінімуму, система буде в ній знаходитися і в подальшому. Якщо ж об'єм системи є невеликим, то переходи між різними точками основного стану є можливими. Надалі ми вважатимемо, що система займає великий об'єм.

Як і в Розділі 3.1, шляхом додавання до лагранжіана константи, зробимо так, щоб основному стану відповідала нульова енергія, а саме: модифікуємо потенціал до вигляду

$$V(|\varphi|^2) = \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2 \quad (3.29)$$

та будемо характеризувати його параметрами λ, φ_0 .

Розглянемо малі збурення над основним станом. Для цього виберемо одну з точок, що задовольняє умову (3.27), наприклад, для простоти, $\varphi_1 = \varphi_0 = \mu/\sqrt{\lambda}$, $\varphi_2 = 0$. А відхилення від цієї точки запишемо за допомогою двох дійсних польових функцій χ, θ

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \chi, \quad \varphi_2 = \theta, \quad (3.30)$$

котрі задовольняють умову $\chi, \theta \ll \varphi_0$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \lambda \left(\frac{(\varphi_0 + \chi)^2 + \theta^2}{2} - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{2\lambda\varphi_0^2}{2} \chi^2 - \lambda\varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \right) + \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4} \theta^4 \right) + \\ &\quad + \left(-\lambda\varphi_0 \theta^2 \chi - \frac{\lambda}{2} \theta^2 \chi^2 \right) = \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_\theta + \mathcal{L}_{int}. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Як бачимо, в даному лагранжіані можна виділити лагранжіан масивного нейтрального скалярного поля χ з масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$ (повністю ідентичний лагранжіану (3.16)), лагранжіан безмасового нейтрального скалярного поля θ та лагранжіан взаємодії полів χ та θ .

Проаналізуємо отриманий результат. Масивним поле χ стало тому, що йому відповідало збурення початкового лагранжіана в радіальному напрямку до кола радіуса φ_0 , де знаходився мінімум потенціалу. При такому збуренні значення потенціалу поля зростає за квадратичним законом. Поле θ відповідає збуренням, що йдуть по дну жолобка потенціалу у дотичному (тангенціальному) напрямку до кола радіуса φ_0 . Саме це й обумовлює відсутність квадратичних за θ доданків у лагранжіані – при малих значеннях θ потенціал не змінюватиметься. При подальшому збільшенні значення θ потенціал почне зростати, оскільки поле θ зростає у напрямку перпендикулярному до вісі φ_1 , а жолобок у цьому напрямку вже буде вигинатися по колу, що й відповідатиме появі доданку $\sim \theta^4$ у лагранжіані.

Як і у випадку, розглянутому в Розділі 3.1, лагранжіан (3.31), що описує збурення над основним станом, не має симетрії (3.21) початкового лагранжіана. Відзначимо, що безмасове скалярне поле (θ), яке утворюється в результаті спонтанного порушення симетрії, називають полем Намбу-Голдстоуна, див. далі.

Подивимось, що буде, якщо б ми обрали іншу точку на колі (3.27), де знаходиться мінімум потенціалу. Задамо цю точку у вигляді

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \xi, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \sin \xi, \quad (3.32)$$

де $\xi \in (0, 2\pi)$ – довільний параметр. Перше, що хочеться зробити, це розглянути збурення у вигляді $\varphi'_1 = \varphi_0 \cos \xi + \alpha$, $\varphi'_2 = \varphi_0 \sin \xi + \beta$, де α , β нові поля. Однак, це призводить до появи в лагранжіані квадратичної за полями частини

$$\mathcal{L}_m = -\lambda\varphi_0^2 [\alpha^2 \cos^2 \xi + \alpha\beta \sin 2\xi + \beta^2 \sin^2 \xi], \quad (3.33)$$

котра відповідає недіагональній масовій матриці:

$$\mathcal{L}_m = -(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \lambda\varphi_0^2 \cos^2 \xi & \lambda\varphi_0^2 \sin \xi \cos \xi \\ \lambda\varphi_0^2 \sin \xi \cos \xi & \lambda\varphi_0^2 \sin^2 \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\Phi^T M^2 \Phi. \quad (3.34)$$

Це означає, що поля α та β не є полями у масовому базисі і, відповідно, говорити про маси квантів цих полів не можна. Іншими словами, поля α та β є суперпозиціями полів, чий кванти мають певні маси. Для переходу в масовий базис потрібно діагоналізувати масову матрицю.

Як відомо [61], симетричну матрицю можна діагоналізувати шляхом унітарних перетворень

$$\mathcal{L}_m = -\Phi^T U U^T M^2 U U^T \Phi = -\Phi'^T U^T M^2 U \Phi', \quad (3.35)$$

де $\Phi' = U^T \Phi$ – польова функція у масовому базисі. Унітарну матрицю U ми обрали дійсною (тобто $U^\dagger = U^T$, $U^\dagger U = U^T U = 1$) та такою, щоб $U^T M U = m(\text{diagonal})$. Отримаємо матрицю переходу

$$U = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

діагональну масову матрицю

$$m^2 = U^T M^2 U = \begin{pmatrix} \lambda\varphi_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

та польові функції у масовому базисі

$$\Phi' = U^T \Phi = \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi + \beta \sin \xi \\ -\alpha \sin \xi + \beta \cos \xi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \chi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

де χ , θ – нові поля, що являють собою збурення в радіальному (поле χ з масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$) та тангенціальному (безмасове поле θ) напрямках відносно кола мінімуму потенціалу (3.32). Відзначимо, що збудження

(3.30) також відповідають радіальному (χ) та тангенціальному (θ) збудженням.

Використавши співвідношення (3.38), можна отримати обернене перетворення

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \cos \xi - \theta \sin \xi \\ \chi \sin \xi + \theta \cos \xi \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

і записати збурення над основним станом у термінах масових полів χ, θ :

$$\varphi'_1 = \varphi_0 \cos \xi + \chi \cos \xi - \theta \sin \xi, \quad \varphi'_2 = \varphi_0 \sin \xi + \chi \sin \xi + \theta \cos \xi. \quad (3.40)$$

Можна показати, що збуджений стан (3.40) приводить до того ж лагранжіана (3.31), що й для випадку $\xi = 0$. Отже, фізичні характеристики системи не залежать від того, який саме із можливих основних станів займе система.

Розглянемо тепер збурення відносно довільної точки на колі (3.27), але оберемо у якості двох ступенів вільності фізичної системи¹ радіус та полярний кут у площині φ_1, φ_2 . Позначимо $r = \varphi_0$, тоді незбуджені функції основного стану будуть

$$\varphi_1 = r \cos \xi, \quad \varphi_2 = r \sin \xi; \quad (3.41)$$

а, відповідно, збуджені функції матимуть вигляд,

$$\varphi'_1 = (r + dr) \cos(\xi + d\xi), \quad \varphi'_2 = (r + dr) \sin(\xi + d\xi). \quad (3.42)$$

У першому порядку малості можна записати

$$\begin{cases} \varphi'_1 = r \cos \xi + dr \cos \xi - rd\xi \sin \xi \\ \varphi'_2 = r \sin \xi + dr \sin \xi + rd\xi \cos \xi \end{cases}, \quad (3.43)$$

де dr та $rd\xi$ радіальні та тангенціальні збурення, які вже будуть залежати від 4-координат ($dr = dr(x)$, $d\xi = d\xi(x)$). Наведений збуджений стан буде співпадати зі станом (3.40), якщо позначити радіальне збурення як $dr = \chi$, а тангенціальне збурення як $rd\xi = \theta$.

Корисно переписати наші вирази в термінах комплексних функцій φ та φ^* . Відзначимо, що запис основного стану у вигляді

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{i\xi} = \frac{\varphi_0 \cos \xi + i\varphi_0 \sin \xi}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{-i\xi} \quad (3.44)$$

¹Комплексне скалярне поле має два ступеня вільності.

відновлює функції $\varphi_{1,2}$ у вигляді (3.41). Збурення ж над основним станом (3.42) без жодних наближень можна представити у зручному для розрахунків вигляді:

$$\varphi' = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}} e^{i(\xi + \tilde{\theta})}, \quad \varphi'^* = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}} e^{-i(\xi + \tilde{\theta})}. \quad (3.45)$$

Використання його підводить до висновку, що фізичне поле пов'язане зі ступенем вільності, який задається безрозмірним параметром $\tilde{\theta}$, є безмасовим, оскільки параметр $\tilde{\theta}$ не входить до потенціалу $V(|\varphi'|^2)$, а виявляє себе лише в кінетичних доданках. Іншими словами, у представленні (3.45) параметр $\tilde{\theta}$ є параметром локальних калібрувальних перетворень групи $U(1)$ ($\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x)$), відносно яких потенціал $V(|\varphi'|^2)$ є інваріантним. Відповідно, масивним буде лише поле, пов'язане зі ступенем вільності $dr = \chi$, що явно входить до потенціалу.

Може виникнути підозра щодо проведення тут деяких математичних маніпуляцій у зв'язку з тим, що попередній розгляд збурень над основним станом у вигляді (3.30) або (3.43) показав, ніби потенційна частина лагранжіана містить обидва типи збурень. Це пояснюється тим, що вираз (3.43) є лише першим наближенням до повного виразу для збурених функцій (3.42), а збурення у (3.30) є частковим випадком збурень (3.43) для значення полярного кута $\xi = 0$.

3.3 Часткове порушення неперервної глобальної симетрії на прикладі групи $SO(3)$

Розглянемо систему трьох нейтральних скалярних полів

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\mu \varphi^\alpha \partial^\mu \varphi^\alpha - V(\vec{\varphi}^2), \quad (3.46)$$

де потенціал заданий виразом

$$V(\vec{\varphi}^2) = -\frac{\mu^2}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{4} (\vec{\varphi}^2)^2, \quad \vec{\varphi}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \varphi^\alpha \varphi^\alpha. \quad (3.47)$$

Очевидно, даний лагранжіан є інваріантним відносно поворотів вектора $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ у тривимірному просторі, що зберігають модуль

даного вектора. Іншими словами, лагранжіан (3.46) інваріантний відносно перетворень групи $SO(3)$.

Із явного виду лагранжіана (3.46) випливає рівняння руху для скалярних нейтральних полів:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{\varphi_\alpha} \frac{\partial V}{\partial \varphi_\alpha} \right) \varphi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.48)$$

Основний стан системи визначається з умови $\partial V / \partial \varphi_\alpha = 0$, є виродженим та знаходиться у множині точок на сфері радіуса $\varphi_0 = \mu / \sqrt{\lambda}$:

$$(\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + (\varphi^3)^2 = \varphi_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (3.49)$$

Як і в попередніх випадках, шляхом додавання константи до потенціалу зробимо так, щоб мінімум потенціалу знаходився в нулі

$$V(\vec{\varphi}^2) = \frac{\lambda}{4} (\vec{\varphi}^2 - \varphi_0^2)^2. \quad (3.50)$$

Оберемо довільну точку на сфері радіуса φ_0 , у якій реалізується мінімум потенціалу, наприклад $\vec{\varphi} = (\varphi_0, 0, 0)$.

Розглянемо збурення над основним станом у вигляді $\vec{\varphi}' = (\varphi_0 + \chi, \theta, \xi)$. Тоді лагранжіан набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\frac{1}{2} \partial_\nu \chi \partial^\nu \chi - \frac{2\lambda\varphi_0^2}{2} \chi^2 - \lambda\varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\nu \theta \partial^\nu \theta + \frac{1}{2} \partial_\nu \xi \partial^\nu \xi - \frac{\lambda}{4} (\theta^2 + \xi^2)^2 - \\ & - \lambda\varphi_0 (\xi^2 + \theta^2) \chi - \frac{\lambda}{2} (\xi^2 + \theta^2) \chi^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

з якого випливає масивність лише одного поля χ із масою кванта поля $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$, а поля θ та ξ є полями Намбу-Голдстоуна.

При розгляді довільної точки (в якості основного стану) на сфері (3.49), як і в Розділі 3.2, отримаємо масивне поле, що є збуренням у радіальному напрямку, та безмасові поля, що є збуреннями у полярному та азимутальному напрямках.

Необхідно відзначити, що в даному випадку, на відміну від попередніх, якщо зафіксувати основний стан у довільній точці на сфері

(3.49), наприклад $\vec{\varphi} = (\varphi_0, 0, 0)$, лагранжіан (3.51) залишиться симетричним до іншої групи перетворень, а саме групи просторових поворотів навколо вісі, що проходить через точку основного стану та центр сфери (3.49). Для обраної нами точки основного стану це будуть повороти навколо вісі x_1 у площині полів θ та ξ , що залишають інваріантною комбінацію $\theta^2 + \xi^2$ та не змінюють обрану точку основного стану. Дана група перетворень є групою $SO(2)$ з одним генератором T_1 . Відбулося часткове порушення симетрії системи.

3.4 Спонтанне порушення неперервної глобальної симетрії групи $SU(2)$

Оскільки група $SU(2)$ відіграє ключову роль у СМ, ми детально розглянемо, як відбувається спонтанне порушення симетрії для неї.

Лагранжіан скалярного поля, що має $SU(2)$ симетрію, має вигляд

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - V(|\phi|^2), \quad (3.52)$$

де потенціал задається виразом

$$V(|\phi|^2) = -\mu^2 |\phi|^2 + \lambda [|\phi|^2]^2, \quad (3.53)$$

польові функції є

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \phi^+ = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}; & \frac{\phi_3 - i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

де φ_i є дійсними функціями, $|\phi|^2 = \phi^+ \phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)/2$.

Лагранжіан (3.52) є інваріантним відносно глобальних перетворень групи $SU(2)$, а саме, поворотів у ізотопічному просторі

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\xi}}{2}} \phi \\ \phi^+ \rightarrow \phi'^+ = \phi^+ e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\xi}}{2}} \end{cases}, \quad (3.55)$$

де $\vec{\xi} = \xi \vec{\nu}$; $\vec{\nu} = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ — одиничний вектор, що визначає напрямок вісі, відносно якої робиться поворот в ізотопічному просторі; ξ — кут повороту в радіанах; $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ — матриці Паулі.

Основний стан системи визначається з умови $\partial V/\partial|\phi|^2 = 0$, є виродженим та знаходиться у множині точок на поверхні сфери в 4-вимірному просторі з радіусом $\varphi_0 = \mu/\sqrt{\lambda}$

$$|\phi_0|^2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{\varphi_0^2}{2}. \quad (3.56)$$

Як і раніше, шляхом додавання до лагранжіана константи, зробимо так, щоб основному стану відповідала нульова енергія:

$$V(|\phi|^2) = \lambda \left(|\phi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2. \quad (3.57)$$

Нехай основний стан буде описуватися функцією

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Розглянемо малі збурення над основним станом у вигляді

$$\phi \rightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \varphi_0 + \gamma + i\delta \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Звичайно, ми ввели 4 нові функції $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, оскільки в початковому лагранжіані було 4 ступені вільності (поля φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$).

Перш ніж рухатися далі, слід відзначити, що

$$\vec{\tau}\vec{\theta} = \tau_1\theta_1 + \tau_2\theta_2 + \tau_3\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Тоді для малих значень безрозмірних величин θ_i матимемо

$$e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}}\phi_0 = \left(1 + i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}\right)\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_0 \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ \varphi_0 \left(1 - i\frac{\theta_3}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Отже, зробивши відповідні перепозначення, ми можемо виразити три функції (α, β, δ) у виразі для ϕ' (3.59) через параметри θ_i . Повністю ж функцію ϕ' можна альтернативно записати у вигляді

$$\phi' = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}}\phi'_0; \quad \phi'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Таким чином, від чотирьох функцій збурень $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ у (3.59) ми перейшли до опису системи за допомогою чотирьох функцій θ_i (де $i = 1, 2, 3$), χ .

За допомогою представлення (3.62) можна відразу зробити висновок, що потенціал $V(\phi^+ \phi)$ не буде залежати від функцій θ_i і відповідні поля будуть безмасовими полями Намбу-Голдстоуна. Підставивши у потенціал (3.57) збурену функцію у формі ϕ'_0 (3.62), отримаємо

$$V(|\phi'_0|^2) = \frac{2\lambda\varphi_0^2}{2}\chi^2 + \lambda\varphi_0\chi^3 + \frac{\lambda}{4}\chi^4, \quad (3.63)$$

відповідно маса кванта нейтрального скалярного поля $\chi \in m_\chi = \sqrt{2\lambda}\varphi_0$.

3.5 Загальний випадок. Теорема Голдстоуна

Розглянемо на якісному рівні теорему Голдстоуна [62], що визначає кількість безмасових (голдстоунівських) бозонів виходячи з симетрійних властивостей лагранжіану, та її доведення. Для простоти зупинимось на лагранжіані дійсного скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi - V(\varphi), \quad (3.64)$$

що є інваріантним відносно глобальних перетворень компактної групи G (має унітарне представлення $g \in G$), а саме $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(g\varphi)$ та, зокрема, $V(\varphi) = V(g\varphi)$.

Нехай мінімум потенціалу реалізується для ненульового значення поля φ . Позначимо функцію основного стану системи як Φ_0 . Збурення над основним станом призведуть до зміни потенціалу, а саме для малих відхилень від основного стану

$$V(\varphi') = V(\Phi_0) + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} \right|_{\varphi=\Phi_0} \psi_i\psi_j + O(\delta\varphi^3), \quad (3.65)$$

де $\psi_k = \delta\varphi_k$ – відхилення поля φ_k від свого значення в основному стані системи. Також ми врахували, що в точці мінімуму потенціалу $\left. \frac{\partial V}{\partial\varphi_i} \right|_{\varphi=\Phi_0} = 0$.

Симетрична матриця

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} \right|_{\varphi=\Phi_0} \quad (3.66)$$

являє собою масову матрицю для полів ψ_i . Оскільки потенціал у точці Φ_0 знаходиться в мінімумі, то елементи масової матриці є додатними $M_{ij} > 0$. Знаючи явно елементи M_{ij} , можна однозначно визначати маси полів ψ_i .

Виявляється, ми можемо отримати інформацію щодо елементів M_{ij} не беручи явно похідні від потенціалу, а лише знаючи симетрійні властивості вакуумного стану [63]. Пояснимо сказане.

У загальному випадку основний стан системи не є інваріантним відносно перетворень групи G : $\Phi'_0 = g\Phi_0 \neq \Phi_0$, однак він може бути інваріантним відносно деякої підгрупи H групи G : $\Phi'_0 = h\Phi_0 = \Phi_0$, де h – представлення підгрупи H , $h \in G$.

Розкладемо потенціал V у точці $\Phi'_0 = g\Phi_0$ відносно точки Φ_0 згідно з (3.65):

$$V(\Phi'_0) = V(\Phi_0) + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi=\Phi_0} \delta \varphi_i \delta \varphi_j + \dots \quad (3.67)$$

Оскільки потенціал є інваріантним відносно перетворень групи G : $V(\Phi'_0) = V(g\Phi_0) = V(\Phi_0)$, – то у даному випадку

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi=\Phi_0} \delta \varphi_i \delta \varphi_j = 0. \quad (3.68)$$

Основна ідея доведення теореми Голдстоуна полягає у тому, що при перетворенні основного стану за допомогою елемента групи G , що належить підгрупі H , основний стан системи не змінюється: $\Phi_0 = h\Phi_0$. У цьому випадку, зміна певної кількості польових функцій відбуватися не буде $\delta \varphi_k = 0$. Тоді, згідно з (3.68), відповідні елементи масової матриці M_{ij} можуть не дорівнювати нулю і визначатимуть значення маси масивних бозонів. Якщо ж здійснити перетворення основного стану системи за допомогою елемента групи G , що не належить підгрупі H , то основний стан системи зміниться і для певної кількості польових функцій $\delta \varphi_m \neq 0$. Це означатиме, що відповідні елементи масової матриці M_{ij} мають дорівнювати нулю і їх кількість визначатиме кількість безмасових бозонів.

Якщо від групи G забрати елементи підгрупи H , то утвориться об'єкт G/H , що не є групою (звичайно, оскільки прибирається і одиничний елемент, що належить H). Елементи G/H утворюють сукупність *суміжних класів*. Сформулюємо тепер *теорему Голдстоуна*:

кількість голдстоунівських (безмасових) бозонів дорівнює розмірності простору G/H (позначають $\dim G/H$), що дорівнює кількості генераторів групи G мінус кількість генераторів підгрупи H . Отриманий результат не залежить від явної форми потенціалу V , від вибору представлення групи G та справедливий як для дійсних, так і для комплексних полів.

Перевіримо дане твердження на конкретних прикладах.

Для групи $U(1)$ вакуумний стан визначається рівнянням $\varphi^* \varphi = \varphi_0^2/2$ (див. явний вигляд потенціалу (3.29)), і, відповідно, може бути представлений у вигляді

$$\Phi_0 = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{i\xi}, \quad (3.69)$$

де ξ довільне дійсне число. У даному випадку $G = U(1)$, $g = e^{i\alpha}$, відповідно $g\Phi_0 = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} e^{i(\xi+\alpha)} \neq \Phi_0$. Інваріантна підгрупа H відсутня (або являє собою одиничний елемент), відповідно, розмірність G/H дорівнює розмірності групи G і дорівнює одиниці. Тобто, в теорії буде присутній один голдстоунівський бозон.

Для групи $SO(3)$ вакуумний стан нейтрального поля $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ визначається рівнянням (3.49)

$$(\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + (\varphi^3)^2 = \varphi_0^2.$$

У найпростішому вигляді його вектор-функція може бути представлена у вигляді

$$\Phi_0 = (\varphi_0, 0, 0). \quad (3.70)$$

Група $G = SO(3)$ має три генератори. Інваріантна підгрупа H являє собою групу $SO(2)$ поворотів навколо вісі OX з одним генератором T_1 (див. (D1.45), (D1.47)): дія елемента $g_x = I + \theta_1 X_1$ на Φ_0 залишає його незмінним $g_x \Phi_0 = \Phi_0$. Відповідно, розмірність G/H дорівнює $3-1 = 2$. Таким чином, у теорії будуть присутні два голдстоунівських бозона.

Для групи $SU(2)$ вакуумний стан скалярного поля

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

визначається рівнянням (3.56)

$$\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2}{2} = \frac{\varphi_0^2}{2}.$$

У найпростішому вигляді він може бути представлений як

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Група $G = SU(2)$ має три генератори. Інваріантна підгрупа H відсутня (або являє собою одиничний елемент), відповідно розмірність G/H дорівнює розмірності групи G і дорівнює трьом. Отже, в теорії будуть присутні три голдстоунівських бозона.

3.6 Механізм Хіггса генерації маси калібрувальних полів

Розглянемо механізм, що забезпечує появу маси у калібрувальних полів у моделях зі спонтанним порушенням симетрії на прикладі $U(1)$ початкової симетрії лагранжіана скалярного поля¹.

Згідно з Розділом 3.2, лагранжіан із глобальною калібрувальною інваріантністю відносно групи $U(1)$ має вигляд:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2. \quad (3.72)$$

Звідси, згідно з Розділом 2.1, легко отримати лагранжіан із локальною калібрувальною інваріантністю, що забезпечується введенням безмасового калібрувального поля

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi - \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.73)$$

де $D_\mu \varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Даний лагранжіан є інваріантним до перетворень

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\alpha} \varphi; \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (3.74)$$

¹Поява маси калібрувальних полів у моделі зі спонтанним порушенням $SU(2)$ симетрії лагранжіана скалярного поля буде розглянута в Розділі 4.3.

Розглянемо збудження скалярного поля відносно основного стану у вигляді (3.45)

$$\varphi' = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}} e^{-i\xi}. \quad (3.75)$$

Отримаємо для лагранжіана (3.73)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi}{2} + \frac{\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi}{2} (\varphi_0^2 + 2\varphi_0 \chi + \chi^2) - \frac{(\sqrt{2\lambda} \varphi_0)^2}{2} \chi^2 - \lambda \varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 + \\ & + e(\varphi_0^2 + 2\varphi_0 \chi + \chi^2) \partial_\mu \xi A^\mu + \frac{e^2}{2} (\chi^2 + 2\varphi_0 \chi) A_\mu A^\mu + \\ & + \frac{(e\varphi_0)^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.76) \end{aligned}$$

із якого випливає, що калібрувальне поле набуває маси $m_A = e\varphi_0$, скалярне поле χ набуває маси $m_\chi = \sqrt{2\lambda} \varphi_0$, а поле¹ ξ є безмасовим.

Отриманий лагранжіан містить доданки взаємодії скалярних полів χ та ξ між собою та з калібрувальним полем A_μ . Однак взаємодія з голдстоунівським полем ξ є нефізичною, оскільки поле ξ може бути взагалі виключене із теорії, а саме, воно може бути поглинуте полем A_μ за допомогою заміни

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \xi. \quad (3.77)$$

У результаті отримуємо лагранжіан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi}{2} - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \lambda \varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 + \\ & + \frac{e^2}{2} (\chi^2 + 2\varphi_0 \chi) A_\mu A^\mu + \frac{m_A^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.78) \end{aligned}$$

що відповідає системі, у якій скалярне поле знаходиться у збудженому стані у формі

$$\varphi' = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}}, \quad (3.79)$$

де відсутнє збудження по уявній частині поля.

¹Величина ξ є безрозмірною функцією. У Розділі 3.2 їй ставилося у відповідність голдстоунівське бозонне поле $\theta = \varphi_0 \xi$.

Лагранжіан (3.78) містить масивне векторне поле та не містить поля голдстоунівського бозона. Безумовно, такий лагранжіан вже не є калібрувально інваріантним, оскільки калібрування вже було зафіксовано виразом (3.77). Таке калібрування отримало назву *унітарного калібрування*.

Необхідно звернути увагу, що безмасове векторне поле має лише дві фізичні проекції спіну частинок $(+1, -1)$: проекції вздовж та проти напрямку руху. Таким чином воно характеризується двома ступенями вільності. На відміну від цього випадку, масивне векторне поле характеризується трьома ступенями вільності: фізичні проекції спіну частинок $(+1, 0, -1)$. У наведеному вище механізмі Хіггса кількість ступенів вільності зберігається, а саме: ступінь вільності, що відповідав уявній частині скалярного поля перейшов у третій ступінь вільності масивного векторного поля. Тому часто вживається жаргонний вираз: калібрувальне поле "з'їло" голдстоунівський бозон і стало масивним.

В загальному випадку лагранжіана з довільною групою симетрії маса калібрувальних полів генерується кінетичними доданками полів матерії з подовженими похідними:

$$(D_\mu \phi)^+ D^\mu \phi = ((\partial^\mu - igT^a A^{\mu,a})\phi)^+ (\partial_\mu - igT^b A_\mu^b)\phi = \quad (3.80)$$

$$\partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - ig(\partial_\mu \phi^+ T^a \phi - \phi^+ T^a \partial_\mu \phi) A^{\mu,a} + g^2 \phi^+ T^a T^b \phi A^{\mu,a} A_\mu^b.$$

Якщо скалярне поле матерії знаходиться в основному стані: $\varphi = \varphi_0$, то останній доданок визначатиме масову матрицю калібрувальних полів

$$g^2 \phi_0^+ T^a T^b \phi_0 A^{\mu,a} A_\mu^b = m_{ab} A^{\mu,a} A_\mu^b. \quad (3.81)$$

Припустимо, що або основний стан або генератори обрані так, що масова матриця є діагональною¹, тоді

$$g^2 \phi_0^+ T^a T^a \phi_0 A^{\mu,a} A_\mu^a = m_a A^{\mu,a} A_\mu^a, \quad m_a = g^2 \phi_0^+ T^a T^a \phi_0, \quad (3.82)$$

де m_a є масою поля A_μ^a .

Припустимо, що існують групові перетворення за допомогою певного генератора відповідної групи, при яких вакуумний стан скалярного поля не змінюється:

$$\phi_0 \rightarrow \phi'_0 = (1 - i\alpha T^a)\phi_0 = \phi_0, \quad (3.83)$$

¹ Якщо ні, то треба унітарними перетвореннями калібрувальних полів зробити масову матрицю діагональною, див. Розділ 4.3.

відповідно $T^a \phi_0 = 0$ і поле A_μ^a з даним груповим індексом є безмасовим.

Наприклад, лагранжіан (3.52) є інваріантним відносно непростої компактної $U(1) \times SU(2)$ групи симетрії. З чотирьох генераторів такої групи $\tau^i/2$, $I/2$ можна створити такі генератори: $\tau^1/2$, $\tau^2/2$, $(I - \tau^3)/2$, $(I + \tau^3)/2$. Нехай основний стан буде описуватися виразом (3.58), тоді

$$T\phi_0 \neq \phi_0, \quad T = a\tau^1/2 + b\tau^2/2 + c(I - \tau^3)/2, \quad (3.84)$$

$$T\phi_0 = 0, \quad T = (I + \tau^3)/2. \quad (3.85)$$

Відповідно для даного лагранжіана буде одне безмасове калібрувальне поле та три масивних.

Узагальнимо отриманий результат за допомогою теореми Голдстоуна: для калібрувальних теорій зі спонтанним порушенням симетрії (в унітарному калібруванні) голдстоунівські бозони зникають, а рівна їм кількість калібрувальних полів стають масивними. Отже, калібрувальні теорії зі спонтанним порушенням симетрії скалярного поля групи G будуть містити відповідні калібрувальні поля в кількості $\dim G$, із яких масивними будуть $\dim G/H$ полів.

Наприклад, якщо для групи $SO(3)$ у стані з непорушеною симетрією ми мали три безмасових скалярних поля та три безмасових векторних калібрувальних поля, то після порушення симетрії будемо мати одне масивне хіггсівське скалярне поле, два масивних калібрувальних поля та одне калібрувальне безмасове поле¹. Для групи $SU(2)$ у стані з непорушеною симетрією ми мали чотири безмасових скалярних поля та три безмасових векторних калібрувальних поля, а після порушення симетрії будемо мати одне масивне хіггсівське скалярне поле та три масивних калібрувальних поля².

Як можна зрозуміти, всі переваги сценарію спонтанного порушення симетрії реалізуються завдяки тому, що система переходить в основний стан з ненульовим значенням скалярної польової функції. При цьому симетрія основного стану є меншою за симетрію початкового стану системи. Дана ситуація може відбутися лише для теорій

¹Група $G = SO(3)$, група $H = SO(2)$, $\dim SO(3) = 3$, $\dim SO(2) = 1$, $\dim SO(3)/SO(2) = 3 - 1 = 2$.

²Група $G = SU(2)$, група $H = E$ – одинична, $\dim SU(2) = 3$, $\dim E = 0$, $\dim SU(2)/H = 3 - 0 = 3$.

бозонних полів, оскільки на рівні вторинноквантованої теорії поля ненульове стале значення польової функції в основному стані системи відповідає існуванню конденсату частинок в основному стані системи, який не може бути реалізований для Фермі частинок згідно з принципом Паулі.

За допомогою векторних полів реалізувати сценарій спонтанного порушення симетрії також неможливо. Справа в тому, що якщо в певній системі відліку компоненти векторного поля мають певні вакуумні середні, тобто $A_\nu(x) = \lambda_\nu + \chi_\nu(x)$, то при переході до іншої системи відліку вони зміняться, див. Додаток 3. Отже така теорія втратить інваріантність відносно перетворень Лоренца. Те ж саме буде і для полів з вищими цілими значеннями спіну. Скалярне ж поле виділяється саме тим, що воно не змінюється при перетвореннях Лоренца.

3.7 Формалізм Штюкельберга для опису масивних векторних полів групи $U(1)$

В даному Розділі буде показано, що для опису масивних векторних полів групи $U(1)$ окрім механізму Хіггса існує альтернативний підхід Штюкельберга. В Стандартній моделі формалізм Штюкельберга не використовується, але він може бути застосовним в розширеннях СМ.

Мотивація введення лагранжіану Штюкельберга

Як відомо, існують два підходи до лагранжевого опису масивного векторного поля: запис лагранжіана за допомогою тензора Максвелла (лагранжіан Прока) та запис лагранжіана масивного векторного поля за аналогією з записом лагранжіана масивного скалярного поля, див. [56]. Оскільки зазначені два лагранжіани відрізняються один від одного на повну похідну, ми очікуємо їх еквівалентності. Однак, як ми побачимо далі, процедура вторинного квантування у зазначених двох формалізмах буде відрізнятися. При спробі узгодити між собою теорію вторинно квантованих векторних масивних полів в зазначених двох підходах і виникне поняття поля Штюкельберга.

Нагадаємо, як відбувається вторинне квантування масивного векторного поля [56]. В стандартному підході лагранжіан масивного зарядженого векторного поля (лагранжіан Прока) має вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 V^\mu V_\mu^\dagger. \quad (3.86)$$

Даний лагранжіан не має калібрувальної інваріантності відносно перетворень за групою $U(1)$ за рахунок масового доданку. Рівняння руху для векторного поля, що описується лагранжіаном (3.86), має вигляд рівняння Прока:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 V_\nu = 0. \quad (3.87)$$

Взявши похідну ∂^ν від обох частин останнього рівняння, отримаємо $m^2 \partial^\nu V_\nu = 0$, звідки автоматично випливає умова Лоренца $\partial^\nu V_\nu = 0$. Вираз для енергії поля, що задається лагранжіаном (3.86), є додатньо-визначеним. За рахунок наявності умови Лоренца кількість ступенів вільності векторного поля замість 4 стає рівною 3 (три поляризаційні стани з проекцією спіну на напрямок руху $\pm 1, 0$). Вторинне квантування відбувається канонічним чином.

В результаті канонічного вторинного квантування [64] отримаємо

$$[\hat{V}_\mu(x), \hat{V}_\nu(y)]_- = 0, \quad [\hat{V}_\mu^\dagger(x), \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = 0 \quad (3.88)$$

$$[\hat{V}_\mu(x), \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = -i \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \Delta_m(x-y), \quad (3.89)$$

де $\Delta_m(x-y)$ – функція Паулі-Йордана, що задовольняє рівнянню Клейна-Гордона $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_m(x-y) = 0$. Взявши похідні від обох частин даного виразу та використавши рівняння на $\Delta_m(x-y)$, можна показати, що

$$[\partial^\mu \hat{V}_\mu(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = 0. \quad (3.90)$$

Розглянемо тепер лагранжіан масивного зарядженого векторного поля у формі, подібній до лагранжіану скалярного поля:

$$\mathcal{L} = -\partial^\nu V^\mu \partial_\nu V_\mu^\dagger + m^2 V^\mu V_\mu^\dagger. \quad (3.91)$$

Цей лагранжіан відрізняється від (3.86) лише на повну похідну, тому ми очікуємо еквівалентності лагранжіанів (3.86) та (3.91). З лагранжіану (3.91) випливає рівняння руху у формі Клейна-Гордона (в рівняння входить лише 4-потенціал, без тензора Максвелла)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) V_\nu = 0. \quad (3.92)$$

Взявши похідну від обох частин даного виразу, отримаємо

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)(\partial^\nu V_\nu) = 0. \quad (3.93)$$

Тобто, як частковий випадок, згортка $\partial^\nu V_\nu$ може бути рівною нулю, а в загальному випадку це може бути ненульова функція, що задовольняє рівнянню (3.93).

Вираз для енергії поля, що задається лагранжіаном (3.91), не є додатнєовизначеним [56]:

$$T^{00} = \sum_{\alpha=1}^3 [m^2 V_\alpha^\dagger V_\alpha + \partial_\mu V_\alpha^\dagger \partial_\mu V_\alpha] - [m^2 V_0^\dagger V_0 + \partial_\mu V_0^\dagger \partial_\mu V_0]. \quad (3.94)$$

Просторові компоненти векторного поля дають позитивний внесок в енергію, а нульова компонента векторного поля дає негативний внесок

в енергію векторного поля. Ситуацію рятує накладання умови Лоренца $\partial_\mu V^\mu = 0$, але воно відбувається штучно, а не впливає з рівнянь руху, як це було в (3.87). Використання умови Лоренца дозволяє виразити нульову компоненту поля через три просторові компоненти. В результаті вираз для енергії стає додатньовизначеним і містить лише три просторові компоненти векторного поля. Відповідно при застосуванні процедури вторинного квантування дані три просторові компоненти будуть проквантовані, а оператор нульової компоненти векторного поля буде виражатися через оператори просторових компонент завдяки умові Лоренца.

Подібна ситуація виникає і у випадку безмасового електромагнітного поля, якщо його описувати лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu. \quad (3.95)$$

Щоб енергія електромагнітного поля не була негативною, штучно накладається умова Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Якщо це зробити на рівні класичних полів, то у вираз для енергії ввійдуть лише дві компоненти електромагнітного поля (внесок нульової компоненти поля та компоненти повздовжньої до просторового вектора імпульсу (третя компонента) взаємно скоротяться). Відповідно при застосуванні процедури вторинного квантування лише дві просторові поперечні компоненти будуть проквантовані, а нульова та третя компоненти залишаться неквантованими компонентами поля [56]. Тому при вторинному квантуванні електромагнітного поля методом Блейлера-Гупта виявляється коректним накласти умову Лоренца не на класичні поля, а на оператори електромагнітних полів після вторинного квантування, а саме:

$$\partial^\mu \hat{A}_\mu^- |phys\rangle = 0, \quad (3.96)$$

де мається на увазі $\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu^- + \hat{A}_\mu^+$, оператор $\hat{A}_\mu^-$ містить лише оператори знищення, а $\hat{A}_\mu^+$ лише оператори народження.

Комутаційні співвідношення на оператори нейтральних безмасових полів в цьому випадку матимуть вигляд [56]:

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)]_- = -ig_{\mu\nu}\Delta_0(x-y), \quad (3.97)$$

де нижній індекс 0 поблизу Δ означає безмасовість векторних полів. Легко отримати, що

$$[\partial^\mu \hat{A}_\mu(x), \partial^\nu \hat{A}_\nu(y)]_- = 0, \quad (3.98)$$

бо для безмасового поля $\partial^\mu \partial_\mu \Delta_0(x-y) = 0$.

Співвідношення (3.96) не суперечить умові (3.98). Справді, поді-
явши праворуч на фізичний стан системи

$$\begin{aligned} & [\partial^\mu \hat{A}_\mu(x), \partial^\nu \hat{A}_\nu(y)]_- = \\ & = [\partial^\mu \hat{A}_\mu^-(x), \partial^\nu \hat{A}_\nu^+(y)]_- + [\partial^\mu \hat{A}_\mu^+(x), \partial^\nu \hat{A}_\nu^-(y)]_- = 0 / |phys\rangle \end{aligned} \quad (3.99)$$

та врахувавши (3.98), отримаємо

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \hat{A}_\mu^-(x) \partial^\nu \hat{A}_\nu^+(y) |phys\rangle - \partial^\nu \hat{A}_\nu^-(y) \partial^\mu \hat{A}_\mu^+(x) |phys\rangle = \\ & = / \partial^\mu \hat{A}_\mu^+ |phys\rangle = |phys'\rangle / = 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

де справедливність твердження $\hat{A}_\mu^+ |phys\rangle = |phys'\rangle$ показана в [56].

Здавалося б, що метод Блейлера-Гупта можна застосувати і для
масивного зарядженого векторного поля з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\partial_\nu V_\mu^\dagger \partial^\nu V^\mu + m^2 V_\mu^\dagger V^\mu, \quad (3.101)$$

але виявляється, що накладання умови (3.96) є суперечливим по від-
ношенню до комутаційних операторів полів [65]. Справді, комутаційні
співвідношення на оператори масивних заряджених векторних полів
в даному підході матимуть вигляд [56]:

$$[\hat{V}_\mu(x), \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = -ig_{\mu\nu} \Delta_m(x-y), \quad (3.102)$$

відповідно,

$$[\partial^\mu \hat{V}_\mu(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = i\partial^\mu \partial_\mu \Delta_m(x-y) = -im^2 \Delta_m(x-y) \neq 0, \quad (3.103)$$

що суперечить умові $\partial^\mu \hat{V}_\mu^- |phys\rangle = 0$ [56, 65].

Для вирішення цієї проблеми Штукельберг у 1938 році запропо-
нував доповнити лагранжіан зарядженого векторного масивного по-
ля (3.91), а саме - додати до нього заряджене скалярне поле $B(x)$,
що отримало назву поля Штукельберга (*Stueckelberg field*). Дане поле
має задовольняти рівнянню

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)B = 0 \quad (3.104)$$

з тією ж масою, що і маса векторного зарядженого масивного поля.

Для операторів вторинноквантованого скалярного поля комутаційні співвідношення мають стандартний вигляд [56]:

$$[\hat{B}(x), \hat{B}(y)]_- = 0, \quad [\hat{B}(x), \hat{B}^\dagger(y)]_- = i\Delta_m(x - y). \quad (3.105)$$

Тоді автоматично буде виконуватися умова

$$\begin{aligned} [\partial^\mu \hat{V}_\mu(x) + m\hat{B}(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y) + m\hat{B}^\dagger(y)]_- = \\ = [\partial^\mu \hat{V}_\mu(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- + m^2[\hat{B}(x), \hat{B}^\dagger(y)]_- = 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

і можна накласти несуперечливу умову квантування у вигляді

$$S^-|phys\rangle = (\partial^\mu \hat{V}_\mu + m\hat{B})^-|phys\rangle = 0 \quad (3.107)$$

та комутаційні співвідношення

$$[S(x), S(y)]_- = [S(x), S^\dagger(y)]_- = 0. \quad (3.108)$$

До питання введення додаткового скалярного поля Штюкельберга можна підійти і з іншого боку, більш просто. Комутаційні співвідношення для вторинноквантованих операторів полів лагранжіана (3.86) мають вигляд (3.89), а комутаційні співвідношення для вторинноквантованих операторів полів лагранжіана (3.101) мають вигляд (3.102). Якщо лагранжіани (3.86) та (3.101) є тотожними (відрізняються на доданки, що являють собою повну похідну), то чому комутаційні співвідношення для вторинноквантованих операторів полів є різними? Доповнення векторного поля додатковим скалярним полем вирішує цю проблему, справді

$$\begin{aligned} \left[V_\mu(x) - \frac{1}{m} \partial_\mu B(x), V_\nu^\dagger(y) - \frac{1}{m} \partial_\nu B^\dagger(y) \right]_- = \\ = -i \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \Delta_m(x - y), \end{aligned} \quad (3.109)$$

що й збігається з виразом (3.89). Можна показати, що умови (3.106) та (3.109) еквівалентні.

Таким чином, замість лагранжіана (3.91), Штюкельберг запропонував використовувати лагранжіан векторного масивного поля разом з допоміжним скалярним полем B :

$$\mathcal{L} = -\partial_\nu V_\mu^\dagger \partial^\nu V^\mu + m^2 V_\mu^\dagger V^\mu + \partial^\mu B^\dagger \partial_\mu B - m^2 B^\dagger B. \quad (3.110)$$

Накладання додаткової умови (3.107) робить енергію системи полів даного лагранжіана додатнєвизначеною.

Порахуємо тепер кількість ступенів вільності в останньому лагранжіані – їх 5, а має бути для лагранжіана масивного векторного поля 3. Один ступінь вільності зніме додаткова умова (3.107). Однак має існувати ще одна умова, яка б зняла ще один ступінь вільності. Такою умовою є умова калібрувальної інваріантності лагранжіану (3.110) відносно перетворень

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = V_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad B \rightarrow B' = B + m\Lambda, \quad (3.111)$$

де Λ – комплексна функція, що задовільняє умові $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Lambda = 0$. Зазначену інваріантність легко побачити, якщо додати до лагранжіану (3.110) повну похідну $-m\partial^\mu [V_\mu^\dagger B + B^\dagger V_\mu]$, що зміщує векторні та скалярні поля, і перетворити лагранжіан до вигляду:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 \left(V_\mu^\dagger - \frac{1}{m}\partial_\mu B^\dagger \right) \left(V^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B \right) - \\ & - (\partial^\mu V_\mu^\dagger + mB^\dagger)(\partial^\nu V_\nu + mB) = \\ & -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 V_\mu^\dagger V^\mu - (\partial^\mu V_\mu^\dagger)(\partial^\nu V_\nu) + \partial_\mu B^\dagger \partial^\mu B - m^2 B^\dagger B. \end{aligned} \quad (3.112)$$

При записі останнього виразу ми врахували, що якщо відкинути повну похідну, є справедливим вираз

$$F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu}/2 = \partial_\nu V_\mu^\dagger \partial^\nu V^\mu - (\partial^\mu V_\mu^\dagger)(\partial^\nu V_\nu).$$

Умова $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Lambda = 0$ впливає з інваріантності другого рядка лагранжіана (3.112) відносно перетворень (3.111).

Лагранжіан (3.112) отримав назву лагранжіана Штюкельберга. Звертаємо увагу, що ньому не зміщуються векторні та скалярні поля.

У випадку нейтрального векторного поля лагранжіан Штюкельберга набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \left(V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B \right) \left(V^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B \right) - \frac{1}{2}(\partial^\mu V_\mu + mB)^2 \\ = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2}(\partial^\mu V_\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{m^2}{2}B^2. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Якщо перепозначити $X_\mu = V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$, то $F_{\mu\nu} = X_{\mu\nu}$ та отримаємо

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}X_{\mu\nu}^\dagger X^{\mu\nu} + m^2 X_\mu^\dagger X^\mu - (\partial^\mu X_\mu^\dagger)(\partial^\nu X_\nu), \quad (3.114)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}X_\mu X^\mu - \frac{1}{2}(\partial^\nu X_\nu)^2 \quad (3.115)$$

для випадків зарядженого та нейтрального полів відповідно. Звертаємо увагу, що комутаційні співвідношення для операторів вторинно-квантованих полів записуються саме для полів X_μ (3.109). Важливим є також той факт, що останні доданки являють собою квадрат додаткової умови (фіксація калібрування) і саме вони забезпечують відсутність змішування між векторною та скалярною складовими поля.

Головна відмінність лагранжіанів Штюкельберга від лагранжіану звичайного масивного векторного поля полягає у тому, що лагранжіан звичайного векторного масивного поля не має інваріантності до калібрувальних перетворень, а лагранжіан Штюкельберга масивних векторних полів має інваріантність відносно фейкових калібрувальних перетворень групи $U(1)$, див. (3.111), при яких поле X_μ не змінюється [66]. Це дає нові можливості для запису доданків взаємодії поля Штюкельберга з іншими полями.

R_ξ калібрування у формалізмі Штюкельберга

Наведені вище лагранжіани Штюкельберга (3.114), (3.115) були побудовані виходячи з вимоги узгодження комутаційних співвідношень для операторів вторинноквантованих функцій з відповідними співвідношеннями, що випливали з лагранжіану Прока. Однак використання лагранжіану Штюкельберга дозволяє провести узагальнення лагранжіана векторного поля на випадок довільного калібрування.

Для спрощення розглядатимемо лише випадок нейтрального векторного поля. Узагальнений лагранжіан має такий вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi = & -\frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\left(V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right)\left(V^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) - \\ & - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 = -\frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}X_\mu X^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu X_\mu)^2 = \\ & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\nu V^\nu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{\xi m^2}{2}B^2, \end{aligned} \quad (3.116)$$

де $\xi > 0$ – параметр, що фіксує калібрування. Звертаємо увагу, що означення 4-вектора $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m$ не змінилося, змінилася лише маса поля B ($m \rightarrow \sqrt{\xi}m$, тому й накладається вимога $\xi > 0$) та вираз для 4-дивергенції $\partial^\mu X_\mu = \partial^\mu V_\mu + mB \rightarrow \partial^\mu V_\mu + \xi mB$. Той факт, що маса скалярного поля залежить від параметра ξ вказує на те, що поле B – допоміжне та нефізичне поле. Як бачимо, в узагальненому вигляді лагранжіан також не містить змішування між векторною та скалярною компонентами поля.

Вираз в передостанньому рядку лагранжіана (3.116) можна розглядати як функцію Лагранжа з додатковою умовою $\partial^\mu X_\mu = 0$ у формалізмі знаходження екстремуму функцій в математичному аналізі за наявності додаткової умови на функцію. Параметр ξ в цьому випадку можна розглядати як параметр Лагранжа. Отже, можна вважати, що в узагальненому формалізмі Штюкельберга векторне поле X_μ є комбінацією векторного та скалярного полів з різними масами $X_\mu = V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$ (V_μ – векторне поле з масою m , B – скалярне поле з масою $\sqrt{\xi}m$) з узагальненою умовою Лоренца у формі $\partial^\mu X_\mu = \partial^\mu V_\mu + \xi mB = 0$. Оскільки нам треба зберегти кількість ступенів вільностей для масивного векторного поля, що дорівнює 3, то замість умови Лоренца ми могли обрати і будь-яку іншу умову. Умова ж $\partial^\mu X_\mu = \partial^\mu V_\mu + \xi mB = 0$ виділена тим, що забезпечує відсутність змішування між полями V_μ та B в кінцевому лагранжіані.

Лагранжіан Штюкельберга (3.116) в узагальненому випадку також залишається інваріантним до "фейкових" калібрувальних перетворень

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = V_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad B \rightarrow B' = B + m\Lambda, \quad (3.117)$$

де Λ має задовольняти умові $(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)\Lambda = 0$.

З лагранжіана (3.116) можна отримати такі рівняння на польові функції

$$\partial_\nu \partial^\nu V_\mu + m^2 V_\mu - (1 - \xi^{-1})\partial_\mu (\partial_\nu V^\nu) = 0, \quad (3.118)$$

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \xi m^2)B = 0. \quad (3.119)$$

Продиференціювавши обидві частини рівняння (3.118) за допомогою дії оператора ∂_μ , отримаємо

$$\xi^{-1}(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)(\partial_\nu V^\nu) = 0, \quad (3.120)$$

тобто $\partial_\nu V^\nu$ в цьому випадку не обов'язково має дорівнювати нулю, воно має задовольняти рівнянню Клейна-Гордона, неначе скалярне поле з масою $\sqrt{\xi}m$.

Використавши означення $X_\mu = V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$, легко отримати, що

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)(\partial_\nu X^\nu) = 0. \quad (3.121)$$

Пропагатор поля Штюкельберга в R_ξ калібруванні

Для лагранжіана векторного масивного поля у формі Прока (3.86) причинна функція Гріна, або пропагатор, має вигляд

$$\langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle_{Proc} = \frac{-i}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right). \quad (3.122)$$

Пропагатор поля Штюкельберга визначається як

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{Sht}(x - x') &= -i \langle 0 | \hat{T} \hat{X}_\mu(x) \hat{X}_\nu(x') | 0 \rangle = \\ &= -i \langle 0 | \hat{T} (\hat{V}_\mu(x) - \partial_\mu \hat{B}(x)/m) (\hat{V}_\nu(x') - \partial_\nu \hat{B}(x')/m) | 0 \rangle = \\ &= -i \langle 0 | \hat{T} \hat{V}_\mu(x) \hat{V}_\nu(x') | 0 \rangle - i \frac{\partial_\mu^{(x)} \partial_\nu^{(x')}}{m^2} \langle 0 | \hat{T} \hat{B}(x) \hat{B}(x') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Пропагатор векторного поля з останнього рядка лагранжіана (3.116)

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\nu V^\nu)^2 \quad (3.124)$$

в імпульсному просторі має вигляд [67–69]

$$\langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle = \frac{-i}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\xi m^2 - k^2 - i\epsilon} \right). \quad (3.125)$$

Пропагатор скалярного поля з останнього рядка лагранжіана (3.116)

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{\xi m^2}{2} B^2 \quad (3.126)$$

в імпульсному просторі має вигляд

$$\langle \hat{B}(k) \hat{B}(-k) \rangle = \frac{i}{\xi m^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (3.127)$$

Відповідно, в імпульсному просторі

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_\mu(k) \hat{X}_\nu(-k) \rangle &= \langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \langle \hat{B}(k) \hat{B}(-k) \rangle = \\ &= \frac{-i}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\xi m^2 - k^2 - i\epsilon} \right) + \frac{ik_\mu k_\nu / m^2}{\xi m^2 - k^2 - i\epsilon} = \\ &= \frac{-i}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Звертаємо увагу, пропагатор поля Штюкельберга в довільному калібруванні виявився незалежним від калібрування та рівним пропагатору лагранжіана Прока (3.122). Проаналізуємо складові отриманого виразу для окремих значень калібрувального параметра ξ .

Для випадку $\xi = 0$ (калібрування Ландау) матимемо

$$\langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle = \frac{-i}{m^2 - k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.129)$$

тобто внесок поля V_μ в пропагатор є повністю поперечним, бо згортка $\langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle k^\nu = 0$ ($V_\mu k^\mu = 0$). Відповідно, внесок поля B є повністю повздовжнім. Саме тому часто в літературі внесок в поле Штюкельберга від скалярного поля називають повздовжнім внеском або повздовжньою компонентою поля Штюкельберга навіть при ненульовому значенні параметра ξ . Вираз пропагатора (3.129) збігається з виразом пропагатора безмасового векторного поля, де внесок у пропагатор дають лише два поляризаційні стани з проекцією спіна ± 1 на напрямок руху. При $\xi = 0$ маса поля B дорівнює нулю і ситуація стає схожою на ту, коли бозон векторного поля набуває масу в результаті спонтанного порушення симетрії, а додатковий ступінь вільності бере за рахунок поглинання голдстоунівського бозону.

Для випадку $\xi = \infty$ (унітарне калібрування) матимемо

$$\langle \hat{X}_\mu(k) \hat{X}_\nu(-k) \rangle = \langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle = \frac{-i}{m^2 - k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right). \quad (3.130)$$

Скалярне поле B випадає з розгляду та ні на що не впливає, бо має масу $\sqrt{\xi}m = \infty$, відповідно, $\langle \hat{B}(k) \hat{B}(-k) \rangle = 0$. Відповідно, в унітарному калібруванні формалізм поля Штюкельберга збігається з формалізмом векторного поля, що задається лагранжіаном Прока.

Звертаємо увагу, що при довільному значенні ξ (не 0 та не ∞), асимптотична поведінка пропагаторів при $k_\mu \rightarrow \infty$ має вигляд:

$$\langle \hat{V}_\mu(k) \hat{V}_\nu(-k) \rangle \sim \frac{1}{k^2}; \quad \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \langle \hat{B}(k) \hat{B}(-k) \rangle \sim \frac{1}{m^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (3.131)$$

тобто внесок поля B (повздовжній внесок) є домінуючим та не прямує до нуля, що є небезпечним для перенормовності теорії.

Якщо ж розглядати поле Штюкельберга як зовнішню лінію у певній діаграмі Фейнмана, то трьом векторам поляризацій відповідають вектора

$$\varepsilon^1 = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon^2 = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon^L = \frac{1}{m} (|\vec{k}|, 0, 0, k_0). \quad (3.132)$$

Ми знову бачимо, що зі зростанням енергії внесок повздовжньої моди буде збільшуватися.

В цьому місці доречно згадати про *теорему еквівалентності голдстоунівського бозона* [68]: амплітуда випромінення або поглинання повздовжнього масивного калібрувального векторного бозона при великих енергіях дорівнює амплітуді випромінення або поглинання голдстоунівського бозона:

$$\varepsilon_\mu^\lambda \mathcal{M}^\mu(A) = \varepsilon_\mu^L \mathcal{M}^\mu(A) = \frac{k^\mu}{m_A} \mathcal{M}^\mu(X) = i\mathcal{M}(G, \xi = 0), \quad (3.133)$$

що вказує домінуючий внесок в реакцію голдстоунівського мезона, що був поглинутий масивним векторним полем (3.77).

У випадку поля Штюкельберга можна зробити аналогічне твердження, яке називається *теорема повздовжньої еквівалентності*. Вона говорить про те, що для високоенергетичного бозона Штюкельберга основний внесок в реакцію буде йти від доданка, що являє собою похідну від скалярного поля. Це можна записати у вигляді твердження для згортки амплітуди реакції з 4-вектором поляризації бозона Штюкельберга у випадку $|\vec{k}| \gg m_X$:

$$\varepsilon_\mu^\lambda \mathcal{M}^\mu(X) = \varepsilon_\mu^L \mathcal{M}^\mu(X) = \frac{k^\mu}{m_X} \mathcal{M}^\mu(X) = i\mathcal{M}(B, \xi = 0). \quad (3.134)$$

3.8 Маса поля Штюдкельберга

Перше, на що потрібно звернути увагу, так це на те, що коли векторне поле калібрувальної групи $U(1)$ описувалося в формалізмі Прока, то його масовий доданок порушував принцип локальної калібрувальної інваріантності [70]. Відповідно, для введення маси векторного поля нам було необхідно поле Хігса зі спонтанним порушенням симетрії, чиє ненульове вакуумне середнє генерувало масу векторного поля. У випадку ж векторного поля Штюдкельберга його лагранжіан (3.116) має інваріантність відносно "фейкових" калібрувальних перетворень (3.117) і наявність масового доданку векторного поля нічим не забороняється, а отже, маса поля Штюдкельберга може задаватися як стартовий параметр теорії. Тобто для введення маси поля Штюдкельберга немає потреби у введенні поля Хігса та застосуванні принципу спонтанного порушення симетрії [71].

Розглянемо ситуацію, коли ми маємо масивне поле Штюдкельберга (3.116) та скалярне поле Хігса (3.73) в найпростішій моделі скалярного поля з інваріантністю до калібрувальних перетворень групи $U(1)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m} \right) \left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m} \right) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 + (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi - \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2, \quad (3.135)$$

де $D_\mu = \partial_\mu - ieV_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. Звертаємо увагу, що в похідну D_μ входить лише поле V_μ , оскільки для лагранжіана скалярного поля з калібрувальним полем ми і далі вимагатимемо виконання принципу локальної калібрувальної інваріантності¹. До моменту спонтанного порушення симетрії векторне поле V_μ має масу m , а скалярне поле B має масу $\sqrt{\xi}m$.

Далі ми вважатимемо, що спонтанне порушення симетрії відбулося і поле Хігса знаходиться в околі стану з мінімумом енергії (3.75):

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + \chi(x)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)/\varphi_0}. \quad (3.136)$$

¹ Якщо в повній похідній $D_\mu \varphi$ буде поле Штюдкельберга, то при калібрувальних перетвореннях $(D_\mu \varphi)' \rightarrow (D_\mu \varphi) + (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi$.

Тоді лагранжіан (3.135) отримає вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m} \right) \left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m} \right) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta - e\varphi_0 V_\mu)^2 \left(1 + \frac{\chi}{\varphi_0} \right)^2 - \lambda \chi^2 \left(\varphi_0 + \frac{\chi}{2} \right)^2, \quad (3.137)$$

де поле θ є безмасовим голдстоунівським бозоном та здається нефізичним, тобто таким від якого можна позбутися шляхом калібрувальних перетворень.

Справді, лагранжіан (3.135) здається калібрувально інваріантним відносно перетворень

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\alpha(x)}\varphi, \quad \varphi^* \rightarrow \varphi'^* = e^{i\alpha(x)}\varphi^*, \\ V_\mu \rightarrow V'_\mu = V_\mu - \partial_\mu \alpha(x)/e, \quad B \rightarrow B' = B - m\alpha(x)/e. \quad (3.138)$$

Тоді, здавалося б, від поля θ можна позбутися шляхом калібрувальних перетворень

$$\varphi \rightarrow e^{-i\theta/\varphi_0}\varphi = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}}, \quad V_\mu \rightarrow V_\mu - \frac{\partial_\mu \theta}{e\varphi_0}, \quad B \rightarrow B - \frac{m}{e\varphi_0}\theta, \quad (3.139)$$

в результаті яких лагранжіан (3.135) набуде вигляду

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m} \right) \left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m} \right) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi + \frac{e^2}{2} (\varphi_0 + \chi)^2 V^\mu V_\mu - \frac{\lambda}{4} (\chi^2 + 2\varphi_0 \chi)^2 \quad (3.140)$$

і здавалося б, завдання виконане і з лагранжіану зникло голдстоунівське поле θ . Однак є проблема, пов'язана з тим, що останній доданок в першому рядку лагранжіана (3.137) при перетвореннях (3.139) буде інваріантним лише за умови $(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)\theta = 0$, але ж поле θ є безмасовим – ми отримали протиріччя. Це значить, що перехід до унітарного калібрування поля Хіггса (позбавитися від поля θ) у випадку наявності поля Штюкельберга **застосовувати не можна** і поле θ слід залишити в лагранжіані [65]!

Якщо поле θ залишається в лагранжіані, то ми маємо проблемний доданок, що йде з $(\partial_\mu \theta - e\varphi_0 V_\mu)^2/2$. Цим доданком є $e\varphi_0 \partial_\mu \theta V^\mu$,

оскільки в ньому є добуток лише двох польових функцій різних полів і це мало б означити на рівні діаграмної техніки Фейнмана перетворення одного поля в інше без зовнішнього впливу, що є нефізичним, див. також Розділ 4.11.

Вирішити цю проблему можна за рахунок модифікації доданку лагранжіана, що визначає додаткову умову для поля Штюкельберга:

$$\mathcal{L}_{cond} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 \rightarrow -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B + \xi e\varphi_0\theta)^2, \quad (3.141)$$

яку можна записати як

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cond} = & -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu)^2 - \frac{\xi}{2}(mB + e\varphi_0\theta)^2 + V^\mu \partial_\mu(mB + e\varphi_0\theta) \\ & - \partial_\mu[V^\mu(mB + e\varphi_0\theta)], \end{aligned} \quad (3.142)$$

де останній рядок можна відкинути як повну похідну. Тоді доданок $V^\mu \partial_\mu(mB + e\varphi_0\theta)$ знищить доданки змішування $e\varphi_0 \partial_\mu \theta V^\mu$ та $V^\mu \partial_\mu B$.

Наступне, що треба відзначити – ми отримали недіагональний вираз для масових доданків полів B та θ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B\theta}^{mass} = & -\frac{\xi}{2}(mB + e\varphi_0\theta)^2 = -\frac{\xi m^2}{2}B^2 - \frac{\xi(e\varphi_0)^2}{2}\theta^2 - \xi m e\varphi_0 B\theta \\ = & -\frac{1}{2}(B; \theta) \begin{pmatrix} \xi m^2 & \xi m e\varphi_0 \\ \xi m e\varphi_0 & \xi(e\varphi_0)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Це означає, що поля B та θ не знаходяться в станах з визначеною масою. Щоб перейти до масового базису полів необхідно діагоналізувати масову матрицю шляхом унітарних перетворень, див. також Розділ 4.3:

$$\begin{pmatrix} B \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ G \end{pmatrix}, \quad (3.144)$$

де позначення S та G відповідають скалярній частині поля Штюкельберга (S) та голдстоунівському бозону (G). Тоді лагранжіан (3.143) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B\theta}^{mass} = & -\frac{S^2}{2}\xi(e\varphi_0 \sin \beta + m \cos \beta)^2 - \frac{G^2}{2}\xi(e\varphi_0 \cos \beta - m \sin \beta)^2 \\ & - \frac{SG}{2}\xi(2me\varphi_0 \cos 2\beta - (m^2 - (e\varphi_0)^2) \sin 2\beta). \end{aligned} \quad (3.145)$$

Зануливши коефіцієнт поблизу змішаного доданку SG , отримаємо

$$\begin{aligned}\tan 2\beta &= \frac{2me\varphi_0}{m^2 - (e\varphi_0)^2}; \text{ або} \\ \tan \beta &= \frac{e\varphi_0}{m}; \sin \beta = \frac{e\varphi_0}{\sqrt{m^2 + (e\varphi_0)^2}}; \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + (e\varphi_0)^2}}.\end{aligned}\quad (3.146)$$

Тоді в нових позначеннях

$$\mathcal{L}_{B\theta}^{mass} = -\frac{\xi(m^2 + (e\varphi_0)^2)}{2}S^2, \quad (3.147)$$

тобто поле S (скалярна частина поля Штюкельберга) стало масивним, а поле G (голдстоунівське поле) стало безмасовим.

В нових позначеннях лагранжіан набуде вигляду

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu V^\mu)^2 + \\ & \frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S - \frac{\xi m_\gamma^2}{2}S^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu G\partial^\mu G + \\ & \frac{1}{2}\partial_\mu \chi\partial^\mu \chi - \frac{m_h^2}{2}\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\chi^4 - \lambda\varphi_0\chi^3 + \\ & \left(\frac{\chi}{\varphi_0} + \frac{\chi^2}{2\varphi_0^2}\right) \left[\left(\frac{e\varphi_0}{m_\gamma}\partial_\mu S + \frac{e\varphi_0}{m_\gamma}\partial_\mu G\right) - e\varphi_0 V_\mu\right]^2,\end{aligned}\quad (3.148)$$

де $m_\gamma = \sqrt{m^2 + (e\varphi_0)^2}$ – маса векторного поля, в яку дає внесок як параметр масивного поля Штюкельберга, так і ненульове вакуумне середнє поля Хіггса. Перша стрічка лагранжіана описує вільне векторне поле V_μ , друга стрічка описує вільні скалярні поля S та G , третя стрічка описує масивне хіггсівське поле χ , четверта стрічка описує взаємодії між полями. Звертаємо увагу, складові поля Штюкельберга (поля V_μ та S) мають масу, що відрізняється на множник¹ $\sqrt{\xi}$, а саме m_γ та $\sqrt{\xi}m_\gamma$ відповідно.

На відміну від механізму Хіггса набуття маси векторного поля, коли гольдстоунівський бозон поглинається векторним полем і кількість

¹В початковому лагранжіані (3.135) до спонтанного порушення симетрії, маси полів відрізнялися також на множник $\sqrt{\xi}$.

його ступенів вільності збільшується на одиницю (3.77), у розглянутому нами випадку поля Штюкельберга поглинання голдстоунівського бозона не відбувається. Це можна пояснити тим, що поле Штюкельберга з заданим параметром маси m з самого початку є масивним і має три ступені вільності. Відповідно, потреби у поглинанні голдстоунівського бозона у нього немає.

Звернемо також увагу, що у граничному випадку нульового вакуумного середнього поля Хіггса, $\sin \beta$ за означенням (3.146) стане рівним нулю і поле S буде тотожно дорівнювати полю B , так само як поле G дорівнюватиме полю θ .

РОЗДІЛ 4

Лагранжіан Стандартної Моделі

Вступ

Як уже зазначалося в Розділі 1, наприкінці 60-х років Стівен Вайнберг, Абдус Салам та Шелдон Глешоу запропонували модель фізики елементарних частинок [46], що базується на $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ калібрувальній групі, де $SU_C(3)$ — кольорова група, що описує сильні взаємодії; $SU_W(2)$ — група слабого ізоспіну, $U_Y(1)$ — група гіперзаряду, а їх прямих добуток $SU_W(2) \times U_Y(1)$ описує електрослабку взаємодію. У запропонованій моделі маси калібрувальних бозонів з'являються в результаті спонтанного порушення симетрії, що спричиняє порушення електрослабкої симетрії $SU_W(2) \times U_Y(1)$ до електромагнітної $U_{EM}(1)$.

Як виявилось, запропонована модель, що отримала назву Стандартної Моделі фізики елементарних частинок (СМ), найкращим чином описує електромагнітні, слабкі та сильні взаємодії елементарних частинок. Її справедливність перевірена численними процесами за участю елементарних частинок до енергетичних масштабів ~ 100 GeV (а для окремих процесів і до декількох TeV), які доступні на сучасних прискорювачах.

Уже в 1979 році (після доведення існування нейтральних струмів за участю Z -бозону в 1974 році) С. Вайнберг, А. Салам та Ш. Глешоу отримали Нобелівську премію.

Відзначимо, що експериментальне відкриття $W^\pm$ та Z бозонів відбулося лише в 1983 році. Тау-лептон відкрили в 1975 році, а тау-нейтрино в 2000. Існування бозона Хіггса було експериментально підтверджено у 2012 році. З іншого боку, існує ряд феноменів, котрі не можуть бути пояснені в рамках СМ, і модель вимагає певних модифікацій, див. далі.

4.1 Загальні положення СМ

В основі СМ лежать:

1. вимога лоренц-інваріантності лагранжіана;
2. принцип локальної калібрувальної інваріантності відносно перетворень груп $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$, де $SU_C(3)$ — група кольорових перетворень у теорії сильних взаємодій, $SU_W(2)$ — група слабого ізоспіну¹, $U_Y(1)$ — група гіперзаряду;
3. механізм спонтанного порушення початкової симетрії моделі $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ до симетрії $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$, де $U_{EM}(1)$ — електромагнітна група (породжує калібрувальне ЕМ поле);
4. вимога перенормовності²;
5. експериментально підтверджений факт порушення симетрії між частинками з лівою та правою кіральністю, див. Додаток 4, зокрема, експериментально реєструються лише нейтрино з лівою кіральністю (та антинейтрино з правою кіральністю);
6. припущення про безмасовість нейтрино та про відсутність нейтрино з правою кіральністю;
7. експериментально підтверджений факт існування лептонів — електрично заряджених електронів (e), мюонів (μ), тау-лептонів (τ) та відповідних електрично нейтральних нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ , а також припущення про утворення лептонами з лівою кіральністю ізотопічних дублетів групи $SU_W(2)$, а правими лептонами (окрім нейтрино) — синглетів групи $SU_W(2)$;
8. експериментально підтверджений факт існування шести різних типів кварків (їх називають ароматами) — верхнього (u , від англ. *up*), нижнього (d , від англ. *down*), дивного (s , від англ. *strange*), чарівного (c , від англ. *charm*), красивого (b , від англ. *beauty*) та правдивого (t , від англ. *true*); а також припущення про утворення лівими кварками ізотопічних дублетів групи $SU_W(2)$, а правими кварками — синглетів групи $SU_W(2)$.

Спробуємо отримати лагранжіан СМ, спираючись на вище зазначені вихідні положення. Спочатку запишемо стартовий лагранжіан у вигляді суми вільного лагранжіана ферміонних полів (безмасових),

¹Дану групу іноді позначають як $SU_L(2)$, оскільки вона стосується перетворень дублетів лівих кіральних станів лептонів та кварків.

²Автоматично виконується завдяки пунктам 2, 3, див. вступ до Розділу 3.

лагранжіана скалярного поля Хіггса (в подальшому забезпечить появу мас у полів матерії та калібрувальних полів) та лагранжіана їх взаємодії:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{int}. \quad (4.1)$$

Лагранжіан ферміонних полів має вигляд

$$\mathcal{L}_f = i\bar{L}_n\gamma^\mu\partial_\mu L_n + i\bar{E}_n\gamma^\mu\partial_\mu E_n + i\bar{Q}_n\gamma^\mu\partial_\mu Q_n + i\bar{U}_n\gamma^\mu\partial_\mu U_n + i\bar{D}_n\gamma^\mu\partial_\mu D_n, \quad (4.2)$$

у якому:

$L_n = \begin{pmatrix} \nu_n \\ e_n \end{pmatrix}_L$ — поле ізотопічного дублету групи $SU_W(2)$ n -го покоління лептонів, що об'єднує поля лише лівої кіральності, є синглетом відносно групи $SU_C(3)$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L; \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L; \quad L_3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L; \quad (4.3)$$

$E_n = (e_n)_R$ — поле заряджених лептонів n -го покоління з правою кіральністю; є синглетом відносно груп $SU_W(2)$ та $SU_C(3)$:

$$E_1 = e_R; \quad E_2 = \mu_R; \quad E_3 = \tau_R; \quad (4.4)$$

поля нейтрино з правою кіральністю відсутні;

$Q_n = \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \end{pmatrix}_L$ — поле ізотопічного дублету групи $SU_W(2)$ та кольорового триплету групи $SU_C(3)$ n -го покоління кварків, що об'єднує поля лише лівої кіральності:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L; \quad Q_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L; \quad Q_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L; \quad (4.5)$$

$U_n = (u_n)_R$ — поле n -го покоління кварків, що є верхніми компонентами ізотопічного дублету Q_n , але з правою кіральністю; є синглетом відносно групи $SU_W(2)$, утворює кольоровий триплет групи $SU_C(3)$:

$$U_1 = u_R; \quad U_2 = c_R; \quad U_3 = t_R; \quad (4.6)$$

$D_n = (d_n)_R$ — поле n -го покоління кварків, що є нижніми компонентами ізотопічного дублету Q_n , але з правою кіральністю; є синглетом відносно групи $SU_W(2)$, утворює кольоровий триплет групи $SU_C(3)$:

$$D_1 = d_R; \quad D_2 = s_R; \quad D_3 = b_R. \quad (4.7)$$

Таким чином, кожна з кваркових функцій, що входить до полів Q_n , U_n , D_n , являє собою кольоровий триплет групи $SU_C(3)$ і може бути представлена у вигляді вектора-стовпчика:

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

в якому замість цифрових індексів (1, 2, 3) прийнято використовувати кольорові індекси: червоний (r , від англ. *red*), зелений (g , від англ. *green*) та синій (b , від англ. *blue*) відповідно.

Таким чином, у СМ виділяють три покоління ферміонних полів

- перше покоління: ν_e, e, u, d ;
- друге покоління: ν_μ, μ, c, s ;
- третє покоління: ν_τ, τ, t, b .

Для частинок, що знаходяться у верхній частині ізотопічних дублетів L_n та Q_n , проекція слабкого ізоспіну ($I = 1/2$) на третю вісь в ізоспінному просторі є $I_3 = 1/2$; для частинок із нижньої частини — $I_3 = -1/2$. Такий вибір знака обумовлений явним виглядом матриці третьої проекції слабкого ізотопічного спіну $T_3 = \tau_3/2$, див. (D1.38), (D1.39).

Лагранжіан поля Хіггса має вигляд

$$\mathcal{L}_H = \partial_\mu H^+ \partial^\mu H - \lambda \left(H^+ H - \frac{\nu^2}{2} \right)^2, \quad (4.9)$$

де поле Хіггса є ізотопічним дублетом групи $SU_W(2)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{h_1 + ih_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{h_3 + ih_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

а параметр ν визначає вакуумне середнє поля.

Калібрувально інваріантний лагранжіан взаємодії ферміонних полів із полем Хіггса¹ має вигляд

$$\mathcal{L}_{int} = - \left(Y_{mn}^l \bar{L}_m H E_n + Y_{mn}^d \bar{Q}_m H D_n + Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n + h.c. \right), \quad (4.11)$$

де $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$ (σ_2 — друга матриця Паулі), Y^f називають матрицями Юкави. Поле $\tilde{H}$ перетворюється відносно групи $SU_W(2)$ за фундаментальним представленням. Вираз $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$ фактично пов'язує

¹Звертаємо увагу, що даний лагранжіан містить взаємодію між ферміонними полями з лівою та правою кіральністю, а також полем Хіггса. В подальшому, після спонтанного порушення симетрії, з цього лагранжіану ми отримаємо масові доданки ферміонних полів $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$.

між собою спряжене до фундаментального представлення, за яким перетворюється поле H^* , із фундаментальним представленням групи, див. (D1.36). Потреба введення $\tilde{H}$ буде роз'яснена пізніше, вона вимагається калібрувальною інваріантністю відносно групи $U_Y(1)$.

Розглянемо інваріантність лагранжіана (4.1) відносно глобальних перетворень групи $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U_Y(1)$. Очевидною є інваріантність відносно зазначених перетворень лагранжіанів $\mathcal{L}_f$ (4.2) та $\mathcal{L}_H$ (4.9). Інваріантність лагранжіана $\mathcal{L}_{int}$ (4.11) слід розглянути окремо.

Перетворення групи $SU_C(3)$ впливають лише на кваркові поля лагранжіану (4.11):

$$Q_n \rightarrow Q'_n = e^{-ig_s C_{Q_n} \vec{T}_C \vec{\xi}} Q_n, \quad U_n \rightarrow U'_n = e^{-ig_s C_{U_n} \vec{T}_C \vec{\xi}} U_n, \\ D_n \rightarrow D'_n = e^{-ig_s C_{D_n} \vec{T}_C \vec{\xi}} D_n, \quad (4.12)$$

де $\vec{T}_C = \vec{\lambda}/2$ — генератори групи $SU_C(3)$ (λ^a — матриці Гелл-Манна (D1.40), $a = 1, \dots, 8$), $g_s C_q$ — кваркові заряди відносно перетворень групи $SU_C(3)$. Проаналізувавши явний вигляд лагранжіану (4.11) можна переконатися, що він буде інваріантним відносно $SU_C(3)$ перетворень лише тоді, коли кваркові заряди є однаковими для всіх кварків. Відповідно ми можемо покласти $C_{Q_n} = C_{U_n} = C_{D_n} = 1$.

Перетворення групи $SU_W(2)$ впливають лише на поля з лівою кіральністю кваркових та лептонних дублетів, а також на поле Хігса:

$$Q_n \rightarrow Q'_n = e^{-ig W_{Q_n} \vec{T}_W \vec{\theta}} Q_n, \quad L_n \rightarrow L'_n = e^{-ig W_{L_n} \vec{T}_W \vec{\theta}} L_n, \\ H \rightarrow H' = e^{-ig W_H \vec{T}_W \vec{\theta}} H, \quad (4.13)$$

де $\vec{T}_W = \vec{\tau}/2$ — генератори групи $SU_W(2)$ (τ^i — матриці Паулі (D1.26), $i = 1, 2, 3$), $g W_f$ — заряди відносно перетворень групи $SU_W(2)$. Проаналізувавши явний вигляд лагранжіану (4.11) можна переконатися, що він буде інваріантним відносно $SU_W(2)$ перетворень лише тоді, коли заряди слабкого ізоспіну є однаковими для всіх зазначених полів. Відповідно ми можемо покласти $W_{Q_n} = W_{L_n} = W_H = 1$.

Перетворення групи $U_Y(1)$ впливають на всі ферміонні поля, а також на поле Хігса:

$$\begin{aligned}
L_n &\rightarrow L'_n = e^{-ig' \frac{Y_L}{2} \alpha} L_n, & E_n &\rightarrow E'_n = e^{-ig' \frac{Y_E}{2} \alpha} E_n, \\
Q_n &\rightarrow Q'_n = e^{-ig' \frac{Y_Q}{2} \alpha} Q_n, & U_n &\rightarrow U'_n = e^{-ig' \frac{Y_U}{2} \alpha} U_n, \\
D_n &\rightarrow D'_n = e^{-ig' \frac{Y_D}{2} \alpha} D_n, & H &\rightarrow H' = e^{-ig' \frac{Y_H}{2} \alpha} H,
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Завдяки цьому, проаналізувавши явний вигляд лагранжіану (4.11), можна переконатися, що заряди полів відносно групи $U_Y(1)$ (гіперзаряди Y_f) не повинні бути рівними. Вимога інваріантності відносно перетворень групи $U_Y(1)$ для лагранжіана $\mathcal{L}_{int}$ (4.11) накладає умову, щоб сумарний гіперзаряд кожного доданка лагранжіана $\mathcal{L}_{int}$ дорівнював нулю.

Зробимо маленький відступ і звернемо увагу на слабкий ізотопічний струм [56]. Справді, якщо ми ввели ізотопічні дублети лівих ферміонів, то можна ввести поняття ізотопічного струму. Зробимо це на прикладі ізотопічного дублету лептонів першого покоління (ми поки опустимо індекс покоління)

$$\vec{J}_\mu = \bar{L} \gamma_\mu \vec{\tau} L. \quad (4.15)$$

Для третьої компоненти ізотопічного струму матимемо

$$J_\mu^3 = \bar{L} \gamma_\mu \frac{\tau^3}{2} L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L. \quad (4.16)$$

Ми знаємо, що для частинок СМ виконується закон збереження електричного заряду, тобто для лептонів першого покоління $Q_e = -1$ (в одиницях заряду протона), $Q_\nu = 0$:

$$J_\mu^{EM} = \bar{\psi} Q \gamma_\mu \psi = -\bar{e}_L \gamma_\mu e_L - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R. \quad (4.17)$$

Комбінуючи електромагнітний струм та третю компоненту ізотопічного струму, отримаємо

$$J_\mu^{EM} - J_\mu^3 = -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R = -\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_\mu L - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R. \quad (4.18)$$

Нульові компоненти 4-векторів струму відповідають просторовим густинам зарядів. Якщо у виразі (4.18) взяти нульові компоненти струмів та проінтегрувати за об'ємом всієї системи, ми отримаємо

Поля, частинки	Q	Y
$L_n = \begin{pmatrix} \nu_n \\ e_n \end{pmatrix}_L$	0 -1	-1
E_n	-1	-2
$Q_n = \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \end{pmatrix}_L$	2/3 -1/3	1/3
U_n	2/3	4/3
D_n	-1/3	-2/3
H		1

Табл. 1: Гіперзаряд Y для полів матерії у СМ.

співвідношення між електричним зарядом, проекцією слабкого ізотопічного спіну частинки на третю вісь та квантовим числом, яке отримало назву гіперзаряду. Співвідношення отримало назву формули Гелл-Манна-Нішіджими [72–74]:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (4.19)$$

де Q – електричний заряд частинки (в одиницях заряду протона), I_3 – проекція слабкого ізотопічного спіну на третю вісь, Y – гіперзаряд, та знаючи значення електричних зарядів частинок, легко отримати значення гіперзаряду для кожної частинки, див. Табл. 1. Наприклад¹, для електрона з $Q = -1$ та $I_3 = -1/2$ (у нижній частині дублету L_1), гіперзаряд $Y = -1$, для електронного нейтрино $Q = 0$, $I_3 = 1/2$, відповідно $Y = -1$.

Використовуючи дані Табл. 1, розглянемо інваріантність доданків лагранжіана (4.11) відносно глобальних перетворень групи $U(1)$.

Для першого доданка матимемо

$$\bar{L}_m H E_n \rightarrow \bar{L}'_m H' E'_n = \bar{L}_m H E_n e^{-i(-Y_L + Y_H + Y_E)\alpha}.$$

¹Ліва частина співвідношення (4.18) дорівнює $Y/2$, відповідно ми одразу отримуємо, що гіперзаряд лівого дублету лептонів $Y_L = -1$, а правого синглету $Y_E = -2$.

Отже, інваріантність буде за умови $Y_H = Y_L - Y_E = 1$.

Для другого доданка матимемо

$$\bar{Q}_m H D_n \rightarrow \bar{Q}'_m H' D'_n = \bar{Q}_m H D_n e^{-i(-Y_Q + Y_H + Y_D)\alpha}.$$

Інваріантність матиме місце, оскільки $-Y_Q + Y_H + Y_D = -1/3 + 1 - 2/3 = 0$.

Для третього доданка матимемо

$$\bar{Q}_m \tilde{H} U_n \rightarrow \bar{Q}'_m \tilde{H}' U'_n = \bar{Q}_m \tilde{H} U_n e^{-i(-Y_Q - Y_H + Y_U)\alpha}.$$

Оскільки $-Y_Q - Y_H + Y_U = -1/3 - 1 + 4/3 = 0$, то інваріантність також матиме місце. Звертаємо увагу, що поле $\tilde{H} = i\sigma^2 H^*$ при перетвореннях групи $U_Y(1)$ (за рахунок H^*) перетворюється як $\tilde{H} \rightarrow \tilde{H}' = \tilde{H} e^{-iY_H\alpha}$. Це є однією з причин введення в теорію поля $\tilde{H}$.

4.2 Застосування принципу локальної калібрувальної інваріантності. Введення калібрувальних полів у СМ

Використаємо принцип локальної калібрувальної інваріантності відносно перетворень групи $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$, а саме будемо вимагати інваріантності відносно наступних локальних перетворень:

- для поля Хіггса H — відносно перетворень $SU_W(2) \times U_Y(1)$

$$H \rightarrow H' = e^{-ig\vec{T}_W\vec{\theta}} e^{-igt\frac{Y_H}{2}\alpha} H;$$

- для полів L_n — відносно перетворень $SU_W(2) \times U_Y(1)$

$$L_n \rightarrow L'_n = e^{-ig\vec{T}_W\vec{\theta}} e^{-igt\frac{Y_L}{2}\alpha} L_n;$$

- для полів E_n — відносно перетворень $U_Y(1)$

$$E_n \rightarrow E'_n = e^{-igt\frac{Y_E}{2}\alpha} E_n;$$

- для полів Q_n — відносно перетворень $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$

$$Q_n \rightarrow Q'_n = e^{-ig_s\vec{T}_C\vec{\xi}} e^{-ig\vec{T}_W\vec{\theta}} e^{-igt\frac{Y_Q}{2}\alpha} Q_n;$$

- для полів U_n — відносно перетворень $SU_C(3) \times U_Y(1)$

$$U_n \rightarrow U'_n = e^{-ig_s\vec{T}_C\vec{\xi}} e^{-igt\frac{Y_U}{2}\alpha} U_n;$$

- для полів D_n — відносно перетворень $SU_C(3) \times U_Y(1)$

$$D_n \rightarrow D'_n = e^{-ig_s \vec{T}_C \vec{\xi}} e^{-ig' \frac{Y_P}{2} \alpha} D_n,$$

де $\vec{T}_C = \vec{\lambda}/2$ — генератори групи $SU_C(3)$ (λ^a — матриці Гелл-Манна (D1.40), $a = 1, \dots, 8$), $\vec{T}_W = \vec{\tau}/2$ — генератори групи $SU_W(2)$ (τ^i — матриці Паулі (D1.26), $i = 1, 2, 3$), Y_j — значення гіперзаряду.

Локальну калібрувальну інваріантність у СМ забезпечують наступні безмасові калібрувальні поля:

- 8 глюонних полів групи перетворень $SU_C(3) - G_\mu^a$ ($\mu = 0 \dots 3$, $a = 1, \dots, 8$) із константою зв'язку g_s (від *strong interaction* — сильна взаємодія), що є однаковою для всіх кварків;
- 3 поля групи $SU_W(2) - V_\mu^i$ ($\mu = 0 \dots 3$, $i = 1, 2, 3$) із константою зв'язку g , що є однаковою для всіх частинок ізотопічних дублетів;
- 1 поле групи $U_Y(1) - B_\mu$ з константою зв'язку $g' Y_j/2$, де гіперзаряд Y_j є різним для різних частинок.

Вище зазначені калібрувальні поля входять до відповідних виразів для подовженої похідної, а саме, у виразах для $\mathcal{L}_f$ (4.2) та $\mathcal{L}_H$ (4.9) потрібно зробити заміни:

$$\partial_\mu H \rightarrow \mathcal{D}_\mu H = \left(\partial_\mu - ig \sum_{i=1}^3 T_W^i V_\mu^i - ig' \frac{Y_H}{2} B_\mu \right) H, \quad (4.20)$$

$$\partial_\mu L_n \rightarrow \mathcal{D}_\mu L_n = \left(\partial_\mu - ig \sum_{i=1}^3 T_W^i V_\mu^i - ig' \frac{Y_L}{2} B_\mu \right) L_n, \quad (4.21)$$

$$\partial_\mu E_n \rightarrow \mathcal{D}_\mu E_n = \left(\partial_\mu - ig' \frac{Y_E}{2} B_\mu \right) E_n, \quad (4.22)$$

$$\partial_\mu Q_n \rightarrow \mathcal{D}_\mu Q_n = \left(\partial_\mu - ig_s \sum_{a=1}^8 T_C^a G_\mu^a - ig \sum_{i=1}^3 T_W^i V_\mu^i - ig' \frac{Y_Q}{2} B_\mu \right) Q_n, \quad (4.23)$$

$$\partial_\mu U_n \rightarrow \mathcal{D}_\mu U_n = \left(\partial_\mu - ig_s \sum_{a=1}^8 T_C^a G_\mu^a - ig' \frac{Y_U}{2} B_\mu \right) U_n, \quad (4.24)$$

$$\partial_\mu D_n \rightarrow \mathcal{D}_\mu D_n = \left(\partial_\mu - ig_s \sum_{a=1}^8 T_C^a G_\mu^a - ig' \frac{Y_D}{2} B_\mu \right) D_n. \quad (4.25)$$

Доречно буде навести явний вигляд матриць слабких та сильних калібрувальних взаємодій:

$$\sum_{i=1}^3 T_W^i V_\mu^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_\mu^3 & V_\mu^1 - iV_\mu^2 \\ V_\mu^1 + iV_\mu^2 & -V_\mu^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} & \frac{V_\mu^1 - iV_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{V_\mu^1 + iV_\mu^2}{\sqrt{2}} & -\frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\sum_{a=1}^8 T_C^a G_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{G_\mu^3 + G_\mu^8/\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{G_\mu^1 - iG_\mu^2}{\sqrt{2}} & \frac{G_\mu^4 - iG_\mu^5}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_\mu^1 + iG_\mu^2}{\sqrt{2}} & \frac{-G_\mu^3 + G_\mu^8/\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{G_\mu^6 - iG_\mu^7}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_\mu^4 + iG_\mu^5}{\sqrt{2}} & \frac{G_\mu^6 + iG_\mu^7}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} G_\mu^8 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

де $c, c' = 1, 2, 3 = r, g, b$ – кольорові індекси.

Як бачимо, на діагональних елементах матриць знаходяться дійсні комбінації полів, а на недиагональних – комплексні. Як побачимо далі, це пов'язано з тим, поля на недиагональних елементах матриці будуть брати участь в реакціях зі зміною відповідних зарядів частинок. Відповідно і поля мають бути також заряджені.

Нагадаємо, що поля матерії можуть мати декілька індексів. Так, наприклад, поле $L = L_{n,\alpha}$ має індекс покоління $n = 1, 2, 3$ та ізотопічний індекс $\alpha = 1, 2$ (наприклад, $L_{1,1} = (\nu_e)_L$, $L_{3,2} = \tau_L$); поле $Q = Q_{n,\alpha,c}$ має індекс покоління $n = 1, 2, 3$, ізотопічний індекс $\alpha = 1, 2$ та кольоровий індекс $c = 1, 2, 3$, якому формально відповідають червоний, зелений та синій колір відповідно (наприклад, поле $Q_{1,1,1}$ є полем червоних u кварків із лівою кіральністю, а $Q_{2,2,3}$ є полем синіх s кварків з лівою кіральністю). Щоб уникнути непорозумінь, як частковий випадок, слід явно показати, як потрібно розписувати доданок лагранжіана СМ, що містить сильну взаємодію ізотопічного кваркового дублету

$$\begin{aligned}
\sum_{n,\alpha,c} \bar{Q}_{n,\alpha,c} (T_C^b G_\mu^b)^{cc'} Q_{n,\alpha,c'} &= /(\text{4.27})/ = \sum_{n,\alpha,c} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{Q}_{n,\alpha,c} G_\mu^{cc'} Q_{n,\alpha,c'} = \\
&= \sum_{n,c,c'} \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{n,c}, \bar{d}_{n,c}) \begin{pmatrix} G_\mu^{cc'} & 0 \\ 0 & G_\mu^{cc'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n,c'} \\ d_{n,c'} \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{n,c,c'} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_{n,c} G_\mu^{cc'} u_{n,c'} + \bar{d}_{n,c} G_\mu^{cc'} d_{n,c'} \right]. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Дивлячись на цей вираз можна трактувати комбінації глюонних полів $G_\mu^{cc'}$ як поля, що мають два кольорових заряди.

Відповідно, лагранжіан СМ, що задовольнятиме умову локальної калібрувальної інваріантності відносно груп $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$, матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SM} &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 V_{\mu\nu}^i V^{i,\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + \\
&+ i \bar{L}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_n + i \bar{E}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu E_n + i \bar{Q}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu Q_n + i \bar{U}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu U_n + i \bar{D}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu D_n + \\
&+ \mathcal{D}_\mu H^\dagger \mathcal{D}^\mu H - \lambda \left(H^\dagger H - \frac{\nu^2}{2} \right)^2 - \\
&- \left(Y_{mn}^l \bar{L}_m H E_n + Y_{mn}^d \bar{Q}_m H D_n + Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n + h.c. \right), \quad (4.29)
\end{aligned}$$

де в першому рядку записано кінетичні доданки для калібрувальних полів та враховано, що, згідно з (2.40),

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (4.30)$$

$$V_{\mu\nu}^i = \partial_\mu V_\nu^i - \partial_\nu V_\mu^i + g \epsilon^{ijk} V_\mu^j V_\nu^k, \quad (4.31)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (4.32)$$

де ϵ^{ijk} – структурні константи групи $SU(2)$ (повністю антисиметричний тензор), f^{abc} – структурні константи групи $SU(3)$.

Відзначимо для подальшого використання, що взаємодія ферміонних полів з калібрувальними полями в (4.29) є діагональною за ферміонними поколіннями. Такий базис ферміонних полів називають *калібрувальним базисом*.

4.3 Застосування принципу спонтанного порушення симетрії. Кут змішування Вайнберга. Маса калібрувальних полів

Лагранжіан СМ (4.29) не містить масових доданків для калібрувальних полів, однак ми знаємо, що слабкі взаємодії обумовлені обміном квантами масивних калібрувальних полів. Для того, щоб зробити кванти калібрувальних полів масивними нам потрібно буде використати механізм Хіггса, див. Розділ 3.6.

Вважається [75], що на ранніх етапах розвитку Всесвіту поле Хіггса знаходилося у станах із високою енергією. У подальшому, у процесі охолодження Всесвіту, поле Хіггса також втрачало свою енергію. У певний момент часу¹ відбувся так званий електрослабкий фазовий перехід, коли хіггсівське поле (4.10) спонтанним чином опустилося поблизу одного зі своїх можливих основних станів, що визначаються умовою $H_0^+ H_0 = v^2/2$. В якості основного стану H_0 обирається стан (3.58), див. обговорення в Розділі 4.11. Відповідно, до цього моменту калібрувальні поля (та частинки матерії) були безмасовими.

Згідно із Розділом 3.4, в околі свого основного стану H_0 (3.58) хіггсівське поле можна представити у вигляді, див. (3.62),

$$H = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

де h — нейтральне скалярне поле, а стала v отримала назву *вакуумного середнього поля Хіггса*, оскільки вона визначає стан з найменшою енергією.

Оскільки лагранжіан СМ є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень, ми можемо зафіксувати калібрування відносно перетворень групи $SU_W(2)$, обравши

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Таке калібрування називають *унітарним*. Якщо його не вводити, то до СМ будуть входити інші збудження поля Хіггса θ_i , що суттєво

¹Цей момент можна грубо оцінити як такий, коли температура Всесвіту була близькою до маси калібрувальних $W^{\pm}, Z$ -бозонів, тобто при $T \sim 100$ GeV, або через 0.1 наносекунду після великого вибуху.

ускладнить розрахунок різноманітних процесів. Однак, наявність полів θ_i не буде впливати на кінцевий результат розрахунків. Тому вибір калібрування в унітарному вигляді — це спосіб суттєво спростити розрахунки, використовуючи локальну калібрувальну інваріантність лагранжіана СМ.

Розглянемо інваріантність вакууму СМ після спонтанного порушення симетрії поля Хіггса

Після спонтанного порушення електрослабкої симетрії поле Хіггса набуває ненульового вакуумного середнього значення

$$\langle H \rangle = H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Для визначення симетрії вакууму необхідно знайти генератори калібрувальної групи, які залишають вектор H_0 незмінним. Генератори групи $SU_W(2)$ мають вигляд

$$T^a = \frac{\tau^a}{2}. \quad (4.36)$$

Безпосереднє множення дає

$$T_1 H_0 = \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (4.37)$$

$$T_2 H_0 = -\frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (4.38)$$

$$T_3 H_0 = -\frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} H_0 \neq 0. \quad (4.39)$$

Отже, жоден із генераторів групи $SU(2)_L$ окремо не залишає вакуум інваріантним.

Для дублета Хіггса гіперзаряд $Y_H = 1$, тому

$$\frac{Y_H}{2} H_0 = \frac{1}{2} H_0. \quad (4.40)$$

Складаючи останні два результати, отримуємо

$$\left(T_3 + \frac{Y_H}{2} \right) H_0 = 0. \quad (4.41)$$

Оскільки комбінація

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (4.42)$$

є генератором електромагнітної групи $U_{\text{ЕМ}}(1)$, то $QH_0 = 0$, тобто вакуум СМ є інваріантним відносно локальних перетворень групи $U_{\text{ЕМ}}(1)$.

Оскільки поле Хіггса не має кольорового заряду, група $SU_C(3)$ також залишає вакуум незмінним. Отже, після спонтанного порушення електрослабкої симетрії симетрією вакууму СМ є

$$SU(3)_C \times U_{\text{ЕМ}}(1). \quad (4.43)$$

Отже, спонтанне порушення симетрії вибирає вакуумний стан, який вже не є інваріантним відносно всієї електрослабкої групи. Лише підгрупа $U_{\text{ЕМ}}(1)$ залишає вакуум незмінним.

Маси векторних полів електрослабкої взаємодії

Як уже відомо з Розділу 3.6, калібрувальні поля отримують масу з кінетичних доданків скалярного поля з ненульовим вакуумним середнім. Розглянемо кінетичний доданок хіггсівського поля

$$\mathcal{L}_{kin}^H = (D^\mu H)^+ D_\mu H, \quad (4.44)$$

де, згідно з (4.20),

$$D_\mu H = \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{V}_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) H \quad (4.45)$$

та ми врахували, що гіперзаряд поля Хіггса $Y_H = 1$. Спираючись на (4.26) та використовуючи для хіггсівського поля вираз в унітарному калібруванні (4.34), останній вираз можна записати як

$$\begin{aligned} D_\mu H &= \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \frac{g}{2} V_\mu^3 - i \frac{g'}{2} B_\mu & -i \frac{g}{2} (V_\mu^1 - i V_\mu^2) \\ -i \frac{g}{2} (V_\mu^1 + i V_\mu^2) & \partial_\mu + i \frac{g}{2} V_\mu^3 - i \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i \frac{g}{2} (V_\mu^1 - i V_\mu^2) \frac{v+h}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} + i \frac{g}{2} V_\mu^3 \frac{v+h}{\sqrt{2}} - i \frac{g'}{2} B_\mu \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Вираз для $(D^\mu H)^+$ отримується із (4.46) шляхом ермітового спряження та піднімання індексу μ :

$$\begin{aligned} (D^\mu H)^+ &= \\ &= \left(i\frac{g}{2}(V^{1,\mu} + iV^{2,\mu})\frac{v+h}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\partial^\mu h}{\sqrt{2}} - i\frac{g}{2}V^{3,\mu}\frac{v+h}{\sqrt{2}} + i\frac{g'}{2}B^\mu\frac{v+h}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

У результаті отримуємо доданки:

$$\begin{aligned} (D^\mu H)^+ D_\mu H &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{g^2}{8} (V^{1,\mu} V_\mu^1 + V^{2,\mu} V_\mu^2 + V^{3,\mu} V_\mu^3) (v+h)^2 + \\ &+ \frac{g'^2}{8} B^\mu B_\mu (v+h)^2 - \frac{gg'}{4} B^\mu V_\mu^3 (v+h)^2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Масивні доданки калібрувальних полів будуть містити квадратичні комбінації полів без взаємодії з полем Хігса (h). Такі доданки можна отримати з (4.48), встановивши, що $h = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{gauge} &= \frac{g^2 v^2}{8} (V^{1,\mu} V_\mu^1 + V^{2,\mu} V_\mu^2) + \\ &+ \frac{g^2 v^2}{8} V^{3,\mu} V_\mu^3 + \frac{g'^2 v^2}{8} B^\mu B_\mu - \frac{gg' v^2}{4} B^\mu V_\mu^3 = \\ &= \frac{g^2 v^2}{8} (V^{1,\mu} V_\mu^1 + V^{2,\mu} V_\mu^2) + \\ &+ (B^\mu; V^{3,\mu}) \begin{pmatrix} g'^2 v^2/8 & -gg' v^2/8 \\ -gg' v^2/8 & g^2 v^2/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Як бачимо, масова частина калібрувальних полів містить недіагональні за полями доданки, а отже, поля V_μ^3 та B_μ не є полями з визначеною масою.

Запишемо масові доданки полів B_μ та V_μ^3 у вигляді

$$X^+ \frac{M^2}{2} X, \quad X = \begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} g'^2 v^2/4 & -gg' v^2/4 \\ -gg' v^2/4 & g^2 v^2/4 \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

що дозволить трактувати M як масову матрицю та переписати даний вираз за допомогою певної унітарної матриці w ($w^+ w = w w^+ = 1$):

$$X^+ M^2 X = X^+ w^+ w M^2 w^+ w X. \quad (4.51)$$

Перепозначимо польові функції як $X' = wX$, $X'^+ = X^+w^+$, та згадаємо, що довільну комплексну симетричну матрицю M^2 можна діагоналізувати за допомогою унітарних перетворень $w^T M^2 w = m^2$, де m^2 – діагональна матриця [61]. Для випадку матриць 2×2 унітарна матриця задається одним параметром та має вигляд

$$w = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad w^+ = w^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Отже, підбором кута θ можна досягнути рівності $X^+ M X = X'^+ m X'$, де m – діагональна матриця.

На практиці зручніше записати "старі" поля через "нові" $X = w^+ X'$, $X^+ = X'^+ w$, тоді $X^+ M^2 X = X'^+ w M^2 w^+ X'$. Далі треба явно записати вираз $X'^+ w M^2 w^+ X'$ та з умови рівності коефіцієнта поблизу змішаного добутку полів знайти кут θ . Отже, вводимо нові поля:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Зворотні перетворення мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ V_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Слід також відзначити, що комбінації $V_\mu^1 \mp iV_\mu^2$ входять і до інших частин лагранжіана СМ, тому вводяться позначення

$$W_\mu^\pm = \frac{V_\mu^1 \mp iV_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (4.55)$$

або, у зворотному напрямку, –

$$V_\mu^1 = \frac{W_\mu^- + W_\mu^+}{\sqrt{2}}; \quad V_\mu^2 = \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{i\sqrt{2}}. \quad (4.56)$$

У термінах нових полів вираз (4.49) запишеться як

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{gauge} = \\ = \frac{g^2 v^2}{8} \left(\frac{(W^{-,\mu} + W^{+,\mu})(W_\mu^- + W_\mu^+)}{2} - \frac{(W^{-,\mu} - W^{+,\mu})(W_\mu^- - W_\mu^+)}{2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2 v^2}{8} (\sin \theta A^\mu + \cos \theta Z^\mu) (\sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu) + \\
& + \frac{g'^2 v^2}{8} (\cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu) (\cos \theta A_\mu - \sin \theta Z_\mu) - \\
& - \frac{gg' v^2}{4} (\cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu) (\sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu) = \\
& = \frac{g^2 v^2}{4} W^{-,\mu} W_\mu^+ + A^\mu A_\mu \left[\frac{g^2 v^2}{8} \sin^2 \theta + \frac{g'^2 v^2}{8} \cos^2 \theta - \frac{gg' v^2}{4} \sin \theta \cos \theta \right] + \\
& + Z^\mu Z_\mu \left[\frac{g^2 v^2}{8} \cos^2 \theta + \frac{g'^2 v^2}{8} \sin^2 \theta + \frac{gg' v^2}{4} \sin \theta \cos \theta \right] + \\
& + A^\mu Z_\mu \left[\frac{g^2 v^2}{8} 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g'^2 v^2}{8} 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{gg' v^2}{4} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right].
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Щоб позбавитися недіагональних доданків, встановимо коефіцієнт поблизу $A^\mu Z_\mu$ рівний нулю. Це нам дозволить знайти кут θ , а саме:

$$\tan(2\theta) = \frac{2gg'}{g^2 - g'^2}, \quad \text{або} \quad \tan \theta = \frac{g'}{g}. \tag{4.58}$$

Відповідно,

$$\cos \theta = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \tag{4.59}$$

а перетворення (4.54) мають вигляд:

$$B_\mu = \cos \theta A_\mu - \sin \theta Z_\mu = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu, \tag{4.60}$$

$$V_\mu^3 = \sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu + \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu. \tag{4.61}$$

Використавши значення (4.58), (4.59), вираз (4.57) запишемо як

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m^{gauge} &= \frac{g^2 v^2}{4} W^{-,\mu} W_\mu^+ + 0 \cdot A^\mu A_\mu + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z^\mu Z_\mu = \\
&= m_W^2 W^{-,\mu} W_\mu^+ + \frac{m_A^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{m_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Звідси випливає, що заряджене поле $W^\pm$ -бозонів та нейтральне поле Z -бозонів є масивними полями із масами квантів поля:

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}v, \quad \frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta. \quad (4.63)$$

Водночас поле A_μ є безмасовим ($M_A = 0$) і відповідає електромагнітному полю. Кут θ отримав назву *кута Вайнберга*, він позначається як θ_W . Згідно з експериментальними даними, $\sin^2 \theta_W = 0.231$ ($\theta_W \approx 28.73^\circ$) та залежить від енергій взаємодіючих частинок (на рівні радіаційних поправок), див. детальніше Розділ 4.10. Для відновлення взаємодії з полем Хіггса потрібно в (4.62) замінити $v^2 \rightarrow (v+h)^2$.

Калібрувальне поле групи $SU_C(3)$ G_μ^a не входило до подовженої похідної від поля Хіггса (4.45), оскільки поле Хіггса є синглетним відносно групи $SU_C(3)$. Відповідно, калібрувальне поле G_μ^a , що описує сильну взаємодію, є безмасовим полем.

Підсумуємо вище сказане. У результаті переходу поля Хіггса в окіл основного стану, при розгляді задачі в унітарному калібруванні, симетрія лагранжіана $CM \ SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ порушується до $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$ ¹, хіггсівське поле набуває ненульового вакуумного значення, за рахунок якого виникає можливість отримання маси калібрувальними полями $\vec{V}_\mu, B_\mu$, що входили до подовженої похідної від поля Хіггса (4.45). Безпосередній розрахунок показав, що поля V_μ^3 та B_μ не є полями у масовому базисі. У результаті переходу до масового базису було отримано безмасове електромагнітне поле A_μ (кванти поля — фотони, позначають γ) та масивні поля $W^\pm, Z$ -бозонів.

Окремі доданки СМ

В унітарному калібруванні (4.34) потенціал поля Хіггса має вигляд

$$V(H) = \lambda \left(H^+ H - \frac{v^2}{2} \right)^2 = \frac{m_h^2}{2} h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4, \quad (4.64)$$

де $m_h = \sqrt{2\lambda}v$ — маса кванта поля Хіггса.

Відповідно, можна записати лагранжіан поля Хіггса (4.9), що є складовою частиною лагранжіана (4.29), у вигляді:

¹Оскільки ми зафіксували калібрування групи $SU_W(2)$, обравши унітарне калібрування, то в подальшому робити $SU_W(2)$ перетворення вже не можна. Якщо ж працювати у загальному калібруванні, див. Розділ (4.11), то після переходу поля Хіггса в окіл основного стану лагранжіан СМ залишатиметься інваріантним і відносно $SU_W(2)$ перетворень. Незалежно від вибору калібрування в системі відбувається спонтанне порушення симетрії вакуумного стану $H_0: wH_0 \neq H_0, w \in SU_W(2)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H &= (D^\mu H)^+ D_\mu H - \lambda \left(H^+ H - \frac{v^2}{2} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{m_h^2}{2} h^2 - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 + m_W^2 W^{-,\mu} W_\mu^+ + \frac{m_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu + \\
&\quad + m_W^2 W^{-,\mu} W_\mu^+ \left(\frac{h^2}{v^2} + 2 \frac{h}{v} \right) + \frac{m_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu \left(\frac{h^2}{v^2} + 2 \frac{h}{v} \right). \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Далі слід переписати окремі доданки лагранжіана (4.29), враховуючи, що замість полів V_μ^i , B_μ ми повинні використовувати поля $W^\pm$, Z_μ , A_μ згідно з (4.55), (4.60), (4.61).

Почнемо з доданка для лівих лептонів

$$\begin{aligned}
i\bar{L}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_n &= /(\text{4.21})/ = \\
&= i(\bar{\nu}_{Ln}, \bar{e}_{Ln}) \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig \sum_{i=1}^3 T_W^i V_\mu^i - ig' \frac{Y_L}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu_{Ln} \\ e_{Ln} \end{pmatrix} = \\
&= i \left[\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{Ln} + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu \partial_\mu e_{Ln} - i \frac{g'}{2} Y_L [\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln}] B_\mu - \right. \\
&\quad \left. - i \frac{g}{2} [(\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} - \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln}) V_\mu^3 + \bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln} (V_\mu^1 - i V_\mu^2) + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} (V_\mu^1 + i V_\mu^2)] \right] \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Запишемо доданок для правих лептонів

$$i\bar{E}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu E_n = /(\text{4.22})/ = i\bar{e}_{Rn} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig' \frac{Y_E}{2} B_\mu \right) e_{Rn}. \quad (4.67)$$

Сума доданків для лівих та правих лептонів має вигляд:

$$\begin{aligned}
i\bar{L}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_n + i\bar{E}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu E_n &= /(\text{D4.11})/ = i \left[\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{Ln} + \bar{e}_n \gamma^\mu \partial_\mu e_n - \right. \\
&\quad \left. - i \frac{g'}{2} Y_L [\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln}] B_\mu - i \frac{g'}{2} Y_E \bar{e}_{Rn} \gamma^\mu e_{Rn} B_\mu - \right. \\
&\quad \left. - i \frac{g}{2} [(\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} - \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln}) V_\mu^3 + \bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln} (V_\mu^1 - i V_\mu^2) + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} (V_\mu^1 + i V_\mu^2)] \right] \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Нарешті, замість полів V_μ^i , B_μ використаємо поля $W^\pm$, Z_μ , A_μ (згідно з (4.55), (4.60), (4.61)) та отримаємо

$$\begin{aligned}
& i\bar{L}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu L_n + i\bar{E}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu E_n = i\bar{\nu}_{Ln}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{Ln} + i\bar{e}_n\gamma^\mu\partial_\mu e_n + \\
& + e \sum_{f=e,\nu} q_f \bar{f}_n\gamma^\mu f_n A_\mu + \frac{g}{2\cos\theta_W} \sum_{f=e,\nu} \bar{f}_n\gamma^\mu \left[t_3^f(1-\gamma^5) - 2q_f \sin^2\theta_W \right] f_n Z_\mu + \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)e_n W_\mu^+ + \bar{e}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_n W_\mu^- \right], \quad (4.69)
\end{aligned}$$

де ми ввели позначення для заряду електрона за модулем¹

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = /(\text{4.59})/ = g \sin\theta_W, \quad (4.70)$$

q_f — заряд частинок в одиницях заряду протона (для електрона $q_e = -1$, для нейтрино $q_\nu = 0$), t_3^f — проекція ізотопічного спіну лептонів ($+1/2$ для нейтрино та $-1/2$ для електронів). Щоб одержати вище зазначений вираз, була також використана формула Гелл-Манна-Нішиджими (4.19), в якій $Q = q$ та $I_3 = t_3^f$.

Аналогічно можна отримати та записати вирази у кварковому секторі СМ

$$\begin{aligned}
& i\bar{Q}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu Q_n + i\bar{U}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu U_n + i\bar{D}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu D_n = \sum_{f=u,d} i\bar{f}_n\gamma^\mu\partial_\mu f_n + \\
& + e \sum_{f=u,d} q_f \bar{f}_n\gamma^\mu f_n A_\mu + \frac{g}{2\cos\theta_W} \sum_{f=u,d} \bar{f}_n\gamma^\mu \left[t_3^f(1-\gamma^5) - 2q_f \sin^2\theta_W \right] f_n Z_\mu + \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)d_n W_\mu^+ + \bar{d}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_n W_\mu^- \right] + \\
& + g_s \sum_{\text{кварки}} \bar{q}\gamma^\mu \left[\sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a \right] q, \quad (4.71)
\end{aligned}$$

де t_3^f — проекція ізотопічного спіну кварків ($+1/2$ для u_{Ln} кварків та $-1/2$ для d_{Ln} кварків). Слід наголосити, що, на відміну від лептонних доданків (4.69), у кварковому виразі всі поля мають як ліві, так і праві кіральні компоненти. Останній доданок у (4.71) описує сильну взаємодію між кварками.

Отже, ми можемо записати

¹Доданок $\sim \bar{e}_n\gamma^\mu e_n A_\mu$ є доданком квантової електродинаміки, і константа взаємодії є відомою — заряд електрона.

$$\begin{aligned}
& i\bar{L}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu L_n + i\bar{E}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu E_n + i\bar{Q}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu Q_n + i\bar{U}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu U_n + i\bar{D}_n\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu D_n = \\
& = i\bar{\nu}_{Ln}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{Ln} + \sum_{f=u,d,e} i\bar{f}_n\gamma^\mu\partial_\mu f_n + \\
& + \sum_{f=u,d,e,\nu} \left[eq_f\bar{f}_n\gamma^\mu f_n A_\mu + \frac{g}{2\cos\theta_W}\bar{f}_n\gamma^\mu \left[t_3^f(1-\gamma^5) - 2q_f\sin^2\theta_W \right] f_n Z_\mu \right] + \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)e_n W_\mu^+ + \bar{e}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_n W_\mu^- \right] + \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)d_n W_\mu^+ + \bar{d}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_n W_\mu^- \right] + \\
& + g_s \sum_{\text{кварки}} \bar{q}\gamma^\mu \left[\sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a \right] q. \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Перетворення виразів для кінетичних доданків калібрувальних полів є найбільш громіздкими. Можна легко перевірити справедливність перетворень для окремих доданків лагранжіана калібрувальних полів, де тензор поля V_μ^i має спрощений максвелівський вигляд

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^3(\partial_\mu V_\nu^i - \partial_\nu V_\mu^i)(\partial^\mu V^{i,\nu} - \partial^\nu V^{i,\mu}) = \\
& = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{-,\mu\nu}, \quad (4.73)
\end{aligned}$$

де введено позначення:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm. \quad (4.74)$$

Загальні перетворення мають вигляд, див. [75],

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^3 V_{\mu\nu}^i V^{i,\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{W}_{\mu\nu}^-\tilde{W}^{+,\mu\nu} + \\
& + \frac{g^2}{4}(W_\mu^-W_\nu^+ - W_\mu^+W_\nu^-)(W^{-,\mu}W^{+,\nu} - W^{+,\mu}W^{-,\nu}) - \\
& - i\frac{g}{2}(F^{\mu\nu}\sin\theta_W + Z^{\mu\nu}\cos\theta_W)(W_\mu^-W_\nu^+ - W_\mu^+W_\nu^-), \quad (4.75)
\end{aligned}$$

де введено позначення

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^- = (\partial_\mu + ieA_\mu + ig\cos\theta_W Z_\mu)W_\nu^- - (\partial_\nu + ieA_\nu + ig\cos\theta_W Z_\nu)W_\mu^- \quad (4.76)$$

та $\tilde{W}_{\mu\nu}^+ = (\tilde{W}_{\mu\nu}^-)^*$. Із явного виразу¹ для $\tilde{W}_{\mu\nu}^\pm$ випливає, що $W^\pm$ -бозони мають електричний заряд $\pm e$ при взаємодії з електромагнітним полем A_μ та заряд $\pm g \cos \theta_W$ при взаємодії з полем Z -бозону. Наявність уявної одиниці в (4.75) пояснюється тим, що вираз $W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-$, розписаний через поля $V_\eta^{1,2}$ (4.55), є уявною величиною

$$W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^- = i(V_\nu^1 V_\mu^2 - V_\mu^1 V_\nu^2);$$

і останній доданок в (4.75), відповідно, є дійсною величиною.

Наведений лагранжіан калібрувальних електрослабких полів (4.75) можна переписати в більш зручній для фізичного сприйняття формі, див., наприклад, [76, 77]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 V_{\mu\nu}^i V^{i,\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+,\mu\nu} \\ & - ig \cos \theta_W (Z^\mu \cdot W^{-,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^+ + W^{-,\mu} \cdot W^{+,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu Z_\nu + W^{+,\mu} \cdot Z^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^-) \\ & - ig \sin \theta_W (A^\mu \cdot W^{-,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^+ + W^{-,\mu} \cdot W^{+,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu A_\nu + W^{+,\mu} \cdot A^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^-) \\ & - g^2 \cos^2 \theta_W [Z^2 (W^- W^+) - (Z W^+) (Z W^-)] - \\ & - g^2 \sin^2 \theta_W [A^2 (W^- W^+) - (A W^+) (A W^-)] - \\ & - g^2 \sin \theta_W \cos \theta_W [2(A Z) (W^- W^+) - (Z W^+) (A W^-) - (Z W^-) (A W^+)] + \\ & + \frac{g^2}{2} [(W^+)^2 (W^-)^2 - (W^+ W^-)^2] \quad (4.77) \end{aligned}$$

де введено позначення

$$a \overleftrightarrow{\partial}_\mu b = a \partial_\mu b - (\partial_\mu a) b, \quad W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \quad (4.78)$$

та явно видно 3- та 4-частинкові взаємодії калібрувальних полів.

Таким чином, ми розглянули та записали всі доданки лагранжіана СМ у виразі (4.29), окрім останнього рядка. Як побачимо в наступному розділі, вище згаданий останній рядок дасть масивні доданки для полів матерії.

¹Зміст подовженої похідної стає прозорим, якщо її записати у вигляді $\partial_\mu + ie A_\mu + ig \cos \theta_W Z_\mu = \partial_\mu + ig (\sin \theta A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu) = \partial_\mu + ig V_\mu^3$.

4.4 Маса полів матерії. Змішування у кварковому секторі. Матриця Кабіббо-Кобаяши-Маскава

Щоб отримати маси полів лептонів та кварків, потрібно розглянути лагранжіан, котрий містить взаємодію поля Хіггса з ферміонами (4.11), та підставити у нього поле Хіггса в унітарному калібруванні (4.34), тобто коли

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = i\sigma^2 H^* = \begin{pmatrix} v+h \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^Y = & -\frac{v}{\sqrt{2}} (Y_{mn}^l \bar{e}_{L_m} e_{R_n} + Y_{mn}^d \bar{d}_{L_m} d_{R_n} + Y_{mn}^u \bar{u}_{L_m} u_{R_n} + h.c.) - \\ & -\frac{h}{\sqrt{2}} (Y_{mn}^l \bar{e}_{L_m} e_{R_n} + Y_{mn}^d \bar{d}_{L_m} d_{R_n} + Y_{mn}^u \bar{u}_{L_m} u_{R_n} + h.c.), \end{aligned} \quad (4.80)$$

де в першому рядку знаходяться масові доданки ферміонів, а в другому – взаємодія ферміонів з полем Хіггса. Звертаємо увагу: до масивних доданків не увійшло поле нейтрино, отже, у СМ нейтрино є безмасовими частинками. Нейтрино також не взаємодіють із полем Хіггса h .

Перед тим яким рухатися далі нагадаємо, що довільна комплексна матриця M може бути діагоналізована за допомогою біунітарних перетворень [61]. Тобто завжди можна підібрати такі унітарні матриці U та V , щоб була справедлива рівність $U^+ M V = m$, де m – діагональна матриця.

Отже щоб позбутися змішування в масових доданках ферміонів, слід перейти від калібрувального базису ферміонних полів до масового базису за допомогою унітарних перетворень ($U^+ U = \hat{1}$)

$$\begin{aligned} e_{R_m} &= U_{mn}^{e_R} \tilde{e}_{R_n}, & d_{R_m} &= U_{mn}^{d_R} \tilde{d}_{R_n}, & u_{R_m} &= U_{mn}^{u_R} \tilde{u}_{R_n}, \\ e_{L_m} &= U_{mn}^{e_L} \tilde{e}_{L_n}, & d_{L_m} &= U_{mn}^{d_L} \tilde{d}_{L_n}, & u_{L_m} &= U_{mn}^{u_L} \tilde{u}_{L_n}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

у якому матриці змішування U можна обрати такими, щоб елементи

матриці Юкави

$$\tilde{Y}^l = (U^{e_L})^+ Y^l U^{e_R}, \quad \tilde{Y}^d = (U^{d_L})^+ Y^d U^{d_R}, \quad \tilde{Y}^u = (U^{u_L})^+ Y^u U^{u_R}, \quad (4.82)$$

стали діагональними і дійсними. Тоді маси ферміонів визначатимуться елементами відповідної діагональної матриці Юкави

$$m_{e_n} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tilde{Y}_{nn}^l; \quad m_{d_n} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tilde{Y}_{nn}^d; \quad m_{u_n} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tilde{Y}_{nn}^u, \quad (4.83)$$

і останній рядок лагранжіана (4.29) (без взаємодії з полем Хігса) набуде вигляду

$$\mathcal{L}_{mass}^{free} = -m_{u_n} \tilde{u}_n \tilde{u}_n - m_{d_n} \tilde{d}_n \tilde{d}_n - m_{e_n} \tilde{e}_n \tilde{e}_n, \quad (4.84)$$

де ми врахували, що функції $f_n = f_{R_n} + f_{L_n}$ відповідають фізичним полям лептонів та кварків. Функції $\tilde{u}_n, \tilde{d}_n, \tilde{e}_n$ є лептонними та кварковими станами в масовому базисі, а саме: $\tilde{u}_n$ відповідає u, c, t кварковим полям, $\tilde{d}_n$ відповідає d, s, b кварковим полям, $\tilde{e}_n$ відповідає лептонним полям, відповідно до $n = 1, 2, 3$. Слід відзначити, що в СМ немає потреби вводити для полів нейтрино матрицю змішування, бо вони не мають масових доданків.

Наступний етап полягає в тому, щоб записати всі доданки лагранжіана (4.72) в термінах кваркових та лептонних полів у масовому базисі.

Насамперед зазначимо, що кінетичні доданки та діагональні за поколіннями доданки в (4.72) (тобто доданки взаємодії ферміонів із полями A_μ та Z_μ) не змінять свого вигляду внаслідок унітарності матриць перетворень $\sum_n U_{kn}^{f+} U_{nm}^f = \delta_{k,m}$:

$$\sum_n \bar{f}_n f_n = \sum_{m,n,k} \bar{f}_k U_{kn}^{f+} U_{nm}^f \tilde{f}_m = \sum_k \bar{f}_k \tilde{f}_k,$$

і ми можемо в них просто замінити ферміонні поля на поля з тільдою.

У кварковому секторі перехід до масового базису призводить до появи змішування між кварками різних поколінь у вершинах взаємодії з $W^\pm$ -бозонами. Справді, спираючись на (4.72), маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q-W} &= \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{u}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d_n W_\mu^+ + \bar{d}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_n W_\mu^-] = \\ &= \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\tilde{u}}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn} \tilde{d}_n W_\mu^+ + \bar{\tilde{d}}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn}^+ \tilde{u}_n W_\mu^-], \end{aligned} \quad (4.85)$$

де $V = (U^{u_L})^{-1}U^{d_L}$ — унітарна 3×3 матриця змішування Кабіббо-Кобаяши-Маскава (ККМ).

Довільну унітарну матрицю (3×3) можна задати за допомогою дев'яти параметрів. Їх можна розбити на три параметри (кути обертання), що повністю задають матрицю, аби вона була дійсною, та шість параметрів, що додатково необхідні для задання комплексної унітарної матриці (фази, входять у матрицю змішування у вигляді множників $e^{i\beta_n}$). Для матриці змішування ККМ п'ять із шести фаз є нефізичними. Їх можна виключити, перевизначивши ферміонні поля $f_n \rightarrow f_n e^{i\beta_n}$. Остання фаза є джерелом CP -порушень у слабких взаємодіях.

Потрібно відзначити, що аби було не три, а лише два покоління кварків, то у відповідній матриці Кабіббо-Кобаяши-Маскава розмірності (2×2) можна було б узагалі позбавитися від фазових множників. У такому випадку не можна було б пояснити наявність порушення CP -симетрії в слабких взаємодіях. Саме цей факт спонукав Макото Кобаяши та Тошихіде Маскава в 1973 році запропонувати розширити кваркову модель Мюрея Гелл-Манна та Джорджа Цвейга до шести кварків, замість чотирьох, як було на той час.

Ясно покажемо, чому саме залишається одна фізична фаза в матриці змішування кварків. Розглянемо доданок $\bar{u}Vd$, якщо V — довільна комплексна матриця:

$$\begin{aligned} \bar{u}Vd &= (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \begin{pmatrix} V_{11}e^{i\beta_{11}} & V_{12}e^{i\beta_{12}} & V_{13}e^{i\beta_{13}} \\ V_{21}e^{i\beta_{21}} & V_{22}e^{i\beta_{22}} & V_{23}e^{i\beta_{23}} \\ V_{31}e^{i\beta_{31}} & V_{32}e^{i\beta_{32}} & V_{33}e^{i\beta_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \\ &= \bar{u}_1 V_{11}e^{i\beta_{11}} d_1 + \bar{u}_1 V_{12}e^{i\beta_{12}} d_2 + \bar{u}_1 V_{13}e^{i\beta_{13}} d_3 + \\ &+ \bar{u}_2 V_{21}e^{i\beta_{21}} d_1 + \bar{u}_2 V_{22}e^{i\beta_{22}} d_2 + \bar{u}_2 V_{23}e^{i\beta_{23}} d_3 + \\ &+ \bar{u}_3 V_{31}e^{i\beta_{31}} d_1 + \bar{u}_3 V_{32}e^{i\beta_{32}} d_2 + \bar{u}_3 V_{33}e^{i\beta_{33}} d_3. \quad (4.86) \end{aligned}$$

Перепозначимо, наприклад, польові функції d -кварків $e^{i\beta_{11}} d_1 = d_1'$, $e^{i\beta_{12}} d_2 = d_2'$, $e^{i\beta_{13}} d_3 = d_3'$, тоді

$$\begin{aligned} \bar{u}Vd &= \bar{u}_1 V_{11} d_1' + \bar{u}_1 V_{12} d_2' + \bar{u}_1 V_{13} d_3' + \\ &+ \bar{u}_2 V_{21} e^{i(\beta_{21}-\beta_{11})} d_1' + \bar{u}_2 V_{22} e^{i(\beta_{22}-\beta_{12})} d_2' + \bar{u}_2 V_{23} e^{i(\beta_{23}-\beta_{13})} d_3' + \\ &+ \bar{u}_3 V_{31} e^{i(\beta_{31}-\beta_{11})} d_1' + \bar{u}_3 V_{32} e^{i(\beta_{32}-\beta_{12})} d_2' + \bar{u}_3 V_{33} e^{i(\beta_{33}-\beta_{13})} d_3'. \quad (4.87) \end{aligned}$$

Тепер, очевидно, можна перепозначити функції кварків u_2 , u_3 , а саме: $e^{-i(\beta_{21}-\beta_{11})} u_2 = u_2'$, $e^{-i(\beta_{31}-\beta_{11})} u_3 = u_3'$, — де було враховано, що коли

$f = e^{i\alpha}g$, то $\bar{f} = e^{-i\alpha}\bar{g}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\bar{u}Vd &= \bar{u}_1V_{11}d_1' + \bar{u}_1V_{12}d_2' + \bar{u}_1V_{13}d_3' + \\
&+ \bar{u}_2'V_{21}d_1' + \bar{u}_2'V_{22}e^{i(\beta_{22}-\beta_{12}-\beta_{11}+\beta_{21})}d_2' + \bar{u}_2'V_{23}e^{i(\beta_{23}-\beta_{13}-\beta_{11}+\beta_{21})}d_3' + \\
&+ \bar{u}_3'V_{31}d_1' + \bar{u}_3'V_{32}e^{i(\beta_{32}-\beta_{12}-\beta_{11}+\beta_{31})}d_2' + \bar{u}_3'V_{33}e^{i(\beta_{33}-\beta_{13}-\beta_{11}+\beta_{31})}d_3' = \\
&= \text{ / після очевидних перепозначень / } = \\
&= \bar{u}_1V_{11}d_1' + \bar{u}_1V_{12}d_2' + \bar{u}_1V_{13}d_3' + \\
&+ \bar{u}_2'V_{21}d_1' + \bar{u}_2'V_{22}e^{i\alpha}d_2' + \bar{u}_2'V_{23}e^{i\beta}d_3' + \\
&+ \bar{u}_3'V_{31}d_1' + \bar{u}_3'V_{32}e^{i\gamma}d_2' + \bar{u}_3'V_{33}e^{i\sigma}d_3'. \quad (4.88)
\end{aligned}$$

Отже, із дев'яти початкових фаз після перепозначень польових функцій залишилось лише чотири. Умова унітарності матриці V дає ще три рівняння на фази, розв'язавши які отримаємо, що матриця V містить лише одну фізичну фазу, що залишилась.

Існує багато варіантів, як параметризувати матрицю ККМ. Стандартна параметризація [33, 53] задається за допомогою послідовних поворотів Ейлера $V = R_{23}W_{13}R_{12}$, де R_{ij} — матриця дійсних поворотів у площині ij ($i, j = 1, 2, 3$ відповідає x, y, z відповідно), W_{13} — комплексних поворотів у площині xz :

$$\begin{aligned}
V &= R_{23}W_{13}R_{12} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (4.89)
\end{aligned}$$

де $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ — три кута змішування; δ — фаза Кобаяши-Маскава; кути θ_{ij} можуть бути в межах $0 \leq \theta_{ij} \leq \pi/2$; фаза δ — від 0 до 2π .

Величини, що входять до матриці змішування ККМ, визначені достатньо точно в ході численних експериментів на прискорювачах [53]:

$$\begin{aligned}
\theta_{12} &= 13.04 \pm 0.05^\circ; \quad \theta_{13} = 0.201 \pm 0.011^\circ; \quad \theta_{23} = 2.38 \pm 0.06^\circ; \\
\delta &= 1.20 \pm 0.08 \text{ рад}. \quad (4.90)
\end{aligned}$$

Наведемо значення модулів елементів матриці ККМ:

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00014 & 0.22536 \pm 0.00061 & 0.00355 \pm 0.00015 \\ 0.22522 \pm 0.00061 & 0.97343 \pm 0.00015 & 0.0414 \pm 0.0012 \\ 0.00886^{+0.00033}_{-0.00032} & 0.0405^{+0.0011}_{-0.0012} & 0.99914 \pm 0.00005 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Повернемося до взаємодії лептонів із W -бозонами. Вона відбувається за допомогою нейтрино, див. (4.69), (4.81):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{l-W} &= \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n W_\mu^+ + \bar{e}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n W_\mu^-] = \\ &= \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{n,m} [\bar{\nu}_n U_{nm}^{eL} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tilde{e}_m W_\mu^+ + \bar{\tilde{e}}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (U^{eL})_{mn}^+ \nu_n W_\mu^-] \end{aligned} \quad (4.92)$$

Перепозначивши $\tilde{\nu} = (U^{eL})^+ \nu$, отримаємо діагональну взаємодію W -бозонів із лептонами

$$\mathcal{L}_{\nu-W} = \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\tilde{\nu}}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tilde{e}_n W_\mu^+ + \bar{\tilde{e}}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tilde{\nu}_n W_\mu^-]. \quad (4.93)$$

Саме функції $\tilde{\nu}_n$ являють собою функції e , μ , τ нейтрино відповідно. Такі стани нейтрино отримали назву ароматних станів.

Підкреслимо, що, описуючи взаємодії W -бозонів із лептонами, ми змогли уникнути введення матриці аналогічної матриці ККМ лише завдяки тому, що в СМ відсутні масові доданки для нейтрино. В протилежному випадку ми не змогли б зробити перепозначення $\tilde{\nu} = (U^{eL})^{-1} \nu$, оскільки при цьому масові доданки нейтрино перестали б бути діагональними.

Корисно відзначити, що в теоретичних моделях із масивними нейтрино взаємодія W -бозонів із лептонами описується за допомогою унітарної матриці, що отримала назву матриці Понтекорво-Макі-Накагава-Саката (ПМНС): $V_{PMNS} = (U^\nu)^{-1} U^{eL}$. Матриця ПМНС характеризується трьома кутами поворотів (як і ККМ матриця), але кількість фаз залежить від того, чи є нейтрино діраковськими частинками (одна фаза), чи частинками Майорана (три фази) [78].

На завершення, хотілося б вказати на те, що не слід приписувати механізму Хіггса генерації мас елементарних частинок СМ виключну роль як механізму, що робить частинки матерії масивними.

Для прикладу розглянемо матеріальні тіла, що оточують нас у земних умовах. Вони складаються з атомів, а ті, в свою чергу, з електронів та нуклонів. Маса електронів є на три порядки меншою за маси нуклонів. Відповідно, основний внесок у масу тіла дають нуклони — протони та нейтрони, що мають кварковий склад uud та udd відповідно. Однак, маса нуклонів становить близько 940 МеВ, а маси кварків — приблизно $m_u = 2.5$ МеВ та $m_d = 5$ МеВ. У сумі маса кварків, наприклад, у протоні складає близько 10 МеВ, що у 94 рази менше за масу нуклона. Яку ж природу має повна маса нуклона, якщо маси окремих кварків забезпечуються механізмом Хіггса?

Масу нуклона можна пояснити через відоме явище дефекта мас, коли маса частинок у зв'язаному стані відрізняється від маси вільних частинок.

Нагадаємо, що для молекул, котрі являють собою зв'язані стани атомів, енергія зв'язку становить близько 1 еВ. Маса молекули є меншою за маси окремих атомів, дефект мас складає $\Delta m/m \sim 10^{-9}$. Для атомів, котрі являють собою зв'язаний стан електронів та ядер, енергія зв'язку ~ 10 еВ, маса атома є меншою за маси складових, дефект мас $\Delta m/m \sim 10^{-8}$. Для ядер, котрі являють собою зв'язаний стан протонів та нейтронів, енергія зв'язку ~ 10 МеВ, маса ядра є меншою за маси нуклонів, дефект мас $\Delta m/m \sim 10^{-3}$. Але у випадку нуклонів (адронів) ми бачимо протилежну ситуацію: маси складових частинок є меншими за масу цілого об'єкта (нуклона), що є зв'язаним станом кварків $\Delta m/m \sim 90$. Пояснення цьому явищу надається на рівні особливостей кварк-глюонної взаємодії та виходить за межі даного посібника, див. детальніше [79].

4.5 Лагранжіан СМ в унітарному калібруванні

Підсумуємо отримані результати та остаточно запишемо лагранжіан СМ в унітарному калібруванні та масовому базисі ферміонних полів (ми будемо опускати знак тільди для спрощення записів).

Оскільки лагранжіан СМ є достатньо громіздким, його зручно представити у вигляді

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{lept}^{free} + \mathcal{L}_{f,em}^{int} + \mathcal{L}_{f,weak}^{int} + \mathcal{L}_{HV}^{int}. \quad (4.94)$$

Розглянемо окремі складові наведеного виразу.

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + \sum_{\text{кварки}} \bar{q} \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s \sum_{a=1}^8 T^a G_\mu^a \right) - m_q \right) q \quad (4.95)$$

є лагранжіаном квантової хромодинаміки (КХД) (QCD від *quantum chromodynamics* – в англ. літературі), котрий включає в себе 6 кваркових полів (u, d, c, s, t, b), 8 безмасових глюонних полів, що є квантами калібрувальних полів G_μ^a , та їх взаємодію між собою. Нагадаємо, що $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ є генераторами групи $SU_C(3)$ і є матрицями 3×3 , а кваркова функція q являє собою стовпчик із трьох кольорових компонент (червоний, зелений, синій) певного кварка. Як видно з (4.95), взаємодія кварків різних кольорів відбувається не безпосередньо через глюонні поля G_μ^a , а через їх комбінації $T^a G_\mu^a$, що представлені в (4.27). Отже, діагональні доданки виражаються через дійсні комбінації полів, а недіагональні — через комплексні, подібно до випадку слабких взаємодій (4.26).

Взаємодію кварків у КХД можна записати у зручному вигляді

$$\mathcal{L}_{QCD}^{int} = g_s \sum_{\text{кварки}} \sum_{a=1}^8 \sum_{c,c'=r,g,b} \bar{q}_c \gamma^\mu T_{cc'}^a q_{c'} G_\mu^a, \quad (4.96)$$

де елементи матриці $T_{cc'}^a$ визначають інтенсивність взаємодії кварків кольорів c та c' з глюонним полем з груповим індексом a і будуть входити до відповідних вершин діаграм Фейнмана в КХД. Звертаємо увагу на те, що глюонна взаємодія кварків не змінює кварковий аромат (відбувається зі збереженням аромату), але може призвести до зміни кольору кварків (кольорових зарядів). Саме тому теорія сильних взаємодій отримала назву квантової **хромодинаміки** (від грецького $\chi\rho\omega\mu\alpha$ – колір). Тут доречно відзначити, що назва глюонних полів

походить від англ. *glue* – клей, тобто це поля, що ніби склеюють кварки всередині баріонів та адронів.

Запишемо тепер частину лагранжіану КХД, що описує взаємодію глюонів

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}. \quad (4.97)$$

Враховуючи, що, згідно з (4.32),

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (4.98)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & -\frac{1}{4} \mathbb{G}_{\mu\nu}^a \mathbb{G}^{a,\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f^{abc} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) G^{b,\mu} G^{c,\nu} - \\ & - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} G_\mu^b G_\nu^c G^{d,\mu} G^{e,\nu}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

де

$$\mathbb{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a \quad (4.100)$$

кінетичний тензор Максвелла без самодії полів. Як можна побачити з (4.99), існують доданки взаємодії між собою трьох та чотирьох глюонних полів за рахунок того, що група КХД є неабелевою групою.

$\mathcal{L}_Y$ описує юкавівську взаємодію ферміонів із бозоном Хіггса

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_f \frac{Y^f}{\sqrt{2}} \bar{f} f h = - \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f h, \quad (4.101)$$

де m_f — маса ферміона. Як можна побачити, в якості заряду юкавівської взаємодії виступає безрозмірна комбінація m_f/v . Тобто, чим важчий ферміон, тим сильнішою буде його взаємодія з бозоном Хіггса. З виразу (4.101) також випливає, що у СМ нейтрино з полем Хіггса не взаємодіють.

$\mathcal{L}_V$ є лагранжіаном взаємодії векторних полів електрослабкої теорії: фотонів, $W^\pm$ -бозонів, Z -бозонів, включаючи їхні самовзаємодії, див. (4.77):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{+,\mu\nu} - \\
& -ig \cos \theta_W (Z^\mu W^{-,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^+ + W^{-,\mu} W^{+,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu Z_\nu + W^{+,\mu} Z^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^-) \\
& -ig \sin \theta_W (A^\mu W^{-,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^+ + W^{-,\mu} W^{+,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu A_\nu + W^{+,\mu} A^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^-) \\
& -g^2 \cos^2 \theta_W [Z^2(W^-W^+) - (ZW^+)(ZW^-)] - \\
& -g^2 \sin^2 \theta_W [A^2(W^-W^+) - (AW^+)(AW^-)] - \\
& -g^2 \sin \theta_W \cos \theta_W [2(AZ)(W^-W^+) - (ZW^+)(AW^-) - (ZW^-)(AW^+)] + \\
& + \frac{g^2}{2} [(W^+)^2(W^-)^2 - (W^+W^-)^2] \quad (4.102)
\end{aligned}$$

де тензори $F_{\mu\nu}$, $Z_{\mu\nu}$ та $W_{\mu\nu}^\pm$ визначені в (4.74), а оператор $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ – в (4.78). Як бачимо, електрично нейтральні поля A , Z взаємодіють з зарядженими полями $W^\pm$ бозонів. Відсутні взаємодії типу AAA , AZZ , ZZZ , AAZ та 4-взаємодії A , Z полів без участі полів $W^\pm$ бозонів.

$\mathcal{L}_H$ є лагранжіаном вільного поля Хіггса та його самодії

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}\partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{m_h^2}{2}h^2 - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4}h^4 = \\
= & \left/ \lambda = \frac{m_h^2}{2v^2} \right/ = \frac{1}{2}\partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{m_h^2}{2}h^2 - \frac{m_h^2}{2v}h^3 - \frac{m_h^2}{8v^2}h^4, \quad (4.103)
\end{aligned}$$

де $m_h = \sqrt{2\lambda}v$ – маса поля Хіггса, λ – константа самодії.

Наступний доданок є лагранжіаном вільних лептонів

$$\mathcal{L}_{lept}^{free} = \sum_n \bar{\ell}_n (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{\ell_n}) \ell_n + \sum_n \bar{\nu}_{L,n} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{L,n}, \quad (4.104)$$

де заряджені лептони (ℓ_n) знаходяться в масовому, а нейтрино – в ароматному базисі.

$\mathcal{L}_{f,em}^{int}$ є лагранжіаном електромагнітних взаємодій ферміонів

$$\mathcal{L}_{f,em}^{int} = e \sum_f q_f \bar{f}_n \gamma^\mu f_n A_\mu, \quad (4.105)$$

де сума відбувається за всіма ферміонами (лептонами та кварками), e – позитивний заряд протона, q_f – електричний заряд ферміона в одиницях заряду протона ($q_e = -1$, $q_\nu = 0$). Лагранжіан $\mathcal{L}_{lept}^{free}$ разом із лагранжіаном $\mathcal{L}_{f,em}^{int}$ утворюють лагранжіан квантової електродинаміки (КЕД) (QED від *quantum electrodynamics* – в англ. літературі).

Квантова електродинаміка як послідовна теорія була створена ще в 1940-х роках. Це була перша перенормовна теорія, яка найбільш детально вивчена та підтверджена експериментально. У цьому сенсі цікаво відзначити, що англійська аббревіатура QED збігається з латинським скороченням QED (*quod erat demonstrandum* — що й потрібно було довести), яке ставиться в кінці доведення математичних тверджень та теорем. Даний збіг таким чином, хоч і випадково, підкреслює справедливість і зрозумілість КЕД.

$\mathcal{L}_{f,weak}^{int}$ є лагранжіаном слабких взаємодій ферміонів

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,weak}^{int} = & \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu \left[t_3^f (1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2 \theta_W \right] f Z_\mu + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_n [\bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \ell_n W_\mu^+ + \bar{\ell}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n W_\mu^-] + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{m,n} [\bar{u}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn} d_n W_\mu^+ + \bar{d}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn}^+ u_n W_\mu^-], \end{aligned} \quad (4.106)$$

де t_3^f — проекція ізотопічного спіну ферміонів (+1/2 для u_{Ln} кварків та нейтрино; -1/2 для d_{Ln} кварків та лептонів ℓ_{Ln}) та V — матриця змішування Кабіббо-Кобаяші-Маскави.

$\mathcal{L}_{HV}^{int}$ описує взаємодію бозона Хігса з векторними бозонами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HV}^{int} = & \frac{g^2 v}{2} W^{-,\mu} W_\mu^+ h + \frac{g^2}{4} W^{-,\mu} W_\mu^+ h^2 + \frac{(g^2 + g'^2) v}{4} Z^\mu Z_\mu h + \\ & + \frac{g^2 + g'^2}{8} Z^\mu Z_\mu h^2 = \left/ m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2} v}{2} \right/ = \quad (4.107) \\ = & m_W^2 \frac{2h}{v} W^{-,\mu} W_\mu^+ + m_W^2 \frac{h^2}{v^2} W^{-,\mu} W_\mu^+ + m_Z^2 \frac{h}{v} Z^\mu Z_\mu + \frac{m_Z^2}{2} \frac{h^2}{v^2} Z^\mu Z_\mu, \end{aligned}$$

а фотони та глюони, як безмасові частинки, напряму не взаємодіють із полем Хігса. Звертаємо увагу, що взаємодія векторних бозонів із бозоном Хігса пропорційна квадрату їх маси, на відміну від взаємодії бозона Хігса з ферміонами (4.101), яка пропорційна масі ферміонів у першому ступені¹. Звертаємо також увагу на відмінність у множнику 2 у взаємодії бозону Хігса з $W^\pm$ - та Z -бозонами, що пов'язана з комплексністю поля W -бозонів.

¹Так і має бути, виходячи з міркувань розмірності. Дія $S = \int d^4x \mathcal{L}$ у системі одиниць $\hbar = c = 1$ є безрозмірною величиною, відповідно розмірністю лагранжіана є енергія в 4-му ступені. Розмірність бозонних та векторних полів — енергія в 1-му ступені, розмірність ферміонних полів — енергія в ступені 3/2.

Наведемо повний вигляд лагранжіана СМ після спонтанного порушення симетрії в унітарному калібруванні, використовуючи вже вище надані означення для окремих його складових:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SM} = & \sum_{\text{кварки}} \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q + \sum_n \bar{e}_n(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{e_n})e_n + \sum_n \bar{\nu}_n i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_n + \\
& + \frac{1}{2}\partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{m_h^2}{2}h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{m_Z^2}{2}Z^\mu Z_\mu - \\
& - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^- W^{+,\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^- W^{+,\mu} - \frac{1}{4}\mathbb{G}_{\mu\nu}^a \mathbb{G}^{a,\mu\nu} - \\
& - \frac{1}{2}g_s f^{abc} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) G^{b,\mu} G^{c,\nu} - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} G_\mu^b G_\nu^c G^{d,\mu} G^{e,\nu} - \\
& - ig \cos \theta_W (Z^\mu W^{-,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^+ + W^{-,\mu} W^{+,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu Z_\nu + W^{+,\mu} Z^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^-) \\
& - ig \sin \theta_W (A^\mu W^{-,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^+ + W^{-,\mu} W^{+,\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\mu A_\nu + W^{+,\mu} A^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu W_\nu^-) \\
& - g^2 \cos^2 \theta_W [Z^2(W^- W^+) - (ZW^+)(ZW^-)] - \\
& - g^2 \sin^2 \theta_W [A^2(W^- W^+) - (AW^+)(AW^-)] - \\
& - g^2 \sin \theta_W \cos \theta_W [2(AZ)(W^- W^+) - (ZW^+)(AW^-) - (ZW^-)(AW^+)] + \\
& + \frac{g^2}{2} [(W^+)^2 (W^-)^2 - (W^+ W^-)^2] + \\
& + g_s \sum_{\text{кварки}} \sum_{a=1}^8 \sum_{c,c'=r,g,b} \bar{q}_c \gamma^\mu T_{cc'}^a q_{c'} G_\mu^a + e \sum_f q_f \bar{f}_n \gamma^\mu f_n A_\mu + \\
& + \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [t_3^f (1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2 \theta_W] f Z_\mu + \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_n [\bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n W_\mu^+ + \bar{e}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n W_\mu^-] + \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{m,n} [\bar{u}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn} d_n W_\mu^+ + \bar{d}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn}^+ u_n W_\mu^-] - \\
& - \frac{m_h^2}{2v} h^3 - \frac{m_h^2}{8v^2} h^4 - \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f h + m_W^2 \frac{2h}{v} W^{-,\mu} W_\mu^+ + m_W^2 \frac{h^2}{v^2} W^{-,\mu} W_\mu^+ + \\
& + m_Z^2 \frac{h}{v} Z^\mu Z_\mu + \frac{m_Z^2}{2} \frac{h^2}{v^2} Z^\mu Z_\mu, \quad (4.108)
\end{aligned}$$

де кінетичні тензори векторних полів $F_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}^{\pm}$, $Z_{\mu\nu}$, $\mathbb{G}_{\mu\nu}^a$ визначені згідно з (4.74) та (4.100).

Таким чином СМ містить 25 параметрів, які визначаються лише за допомогою експериментальних спостережень: 3 маси заряджених лептонів m_l ; 6 мас m_q , 3 кути змішування θ_{ij} та 1 фаза δ кваркового сектору; 2 параметри (ν, λ) потенціалу Хіггса; 3 сталі (g', g, g_s) калібрувальних взаємодій груп $U_Y(1) \times SU_W(2) \times SU_C(3)$; 6 гіперзарядів Y_i лептонів, кварків та поля Хіггса; та, як буде далі показано в Розділі 6.1, 1 вакуумний кут $\theta_{\text{КХД}}$ ¹.

4.6 Теорія Фермі. Чотириферміонна взаємодія

Згідно з правилами діаграмної техніки Фейнмана діаграми, що описують процеси слабкої взаємодії між лептонами за рахунок обміну $W^{\pm}$ -бозоном мають вигляд представлений на Рис. 5. Вони відповідають доданку (4.106) лагранжіану СМ.

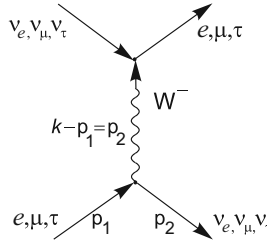


Рис. 5: Діаграма СМ, що описує взаємодію масивних лептонів та нейтрино завдяки обміну $W^{\pm}$ -бозоном.

Якщо енергії частинок не є великими, а саме у випадку коли квадрат 4-імпульсу віртуального $W^{\pm}$ -бозону є малим у порівнянні з його масою, слабка взаємодія в СМ описується теорією Фермі, що зводиться до наступної заміни пропагатора поля $W^{\pm}$ бозона в унітарному калібруванні:

$$\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{M_W^2}}{k^2 - M_W^2} \rightarrow -\frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}, \quad k^2 \ll M_W^2. \quad (4.109)$$

¹Кут Вайнберга не є незалежним параметром, оскільки $\tan \theta_W = g'/g$.

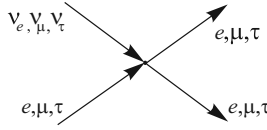


Рис. 6: Чотириферміонна діаграма, що описує взаємодію масивних лептонів та нейтрино в теорії Фермі.

В цьому випадку внутрішня лінія на діаграмі (пропатор частинки) переходить у сталу величину, що відповідає загальному множнику у взаємодії частинок, а процеси слабкої взаємодії можна описати точковою чотириферміонною діаграмою, див. Рис. 6, якій відповідає лагранжіан

$$\mathcal{L}^W = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{M_W^2} \sum_{n=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n \cdot \bar{e}_n \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_n. \quad (4.110)$$

Ввівши нову величину, яка отримала назву *сталой Фермі*¹,

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_W^2}, \quad (4.111)$$

ми приходимо до стандартного вигляду чотириферміонного лагранжіану Фермі, що описує взаємодію лептонів при низьких енергіях

$$\mathcal{L}^{Fermi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{n=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n \cdot \bar{e}_n \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_n. \quad (4.112)$$

Звертаємо увагу, що отримана взаємодія Фермія не є перенормовною взаємодією, див. розділ 7 Застосування теорії Фермі в області великих енергій взаємодіючих частинок призводитиме до нефізичних результатів.

Звичайно, наближення (4.109) можна використовувати і для запису міжкваркової взаємодії за рахунок W -бозону. В цьому випадку у відповідному ефективному лагранжіані додатково з'являться множники – елементи матриці Кабіббо-Кобаяши-Маскави.

¹Історично, ця стала вперше з'явилася при спробі описати явище β -розпаду за допомогою ефективного лагранжіану $\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_p(x) \gamma^\mu \Psi_n(x)] [\bar{\Psi}_e(x) \gamma_\mu \Psi_\nu(x)]$ ще в 30-х роках минулого століття. Звичайно, в той час теорії слабкої взаємодії, що базується на процесах за участі $W^\pm$, Z бозонів, ще не існувало.

Використавши співвідношення (4.63) $M_W = gv/2$, можна записати

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}. \quad (4.113)$$

Стала Фермі визначається експериментальними методами з дослідження часу життя мюона. Її чисельне значення

$$G_F = 1.1663787(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \approx \frac{1}{(292.81 \text{GeV})^2} \approx \frac{1.01 \cdot 10^{-5}}{m_p^2}, \quad (4.114)$$

де $m_p = 0.9382723 \text{ GeV}$ маса протона (останні два записи наведені для зручності запам'ятовування). Знаючи значення сталої Фермі легко отримати значення вакуумного середнього поля Хіггса

$$v = (G_F \sqrt{2})^{-1/2} \approx 246.22 \text{ GeV}. \quad (4.115)$$

Аналогічним чином можна записати низькоенергетичний лагранжіан взаємодії електрично заряджених лептонів та нейтрино, що відбувається завдяки обміну Z -бозоном. В цьому випадку слід замінити пропагатор поля Z -бозона, див. Рис. 7:

$$\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2}}{k^2 - M_Z^2} \rightarrow -\frac{g_{\mu\nu}}{M_Z^2}, \quad k^2 \ll M_Z^2. \quad (4.116)$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z^{Fermi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2M_Z \cos \theta_W} \right)^2 \\ &\sum_n \bar{e}_n \gamma^\mu \left[t_3^f (1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2 \theta_W \right] e_n \cdot \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n = \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_n \bar{e}_n \gamma^\mu \left[-\frac{1 - \gamma^5}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right] e_n \cdot \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n, \end{aligned} \quad (4.117)$$

де ми використали, що $M_W = M_Z \cos \theta_W$ (4.63).

Низькоенергетичні лагранжіани (4.112), (4.117) дозволяють з аналізу перерізів лептонних реакцій за участі нейтрино віднайти значення параметра $\sin^2 \theta_W$, що й було зроблено ще в кінці 70-х років XX століття [80]. Отримане тоді значення становило $\sin^2 \theta_W = 0.229 \pm 0.009$.

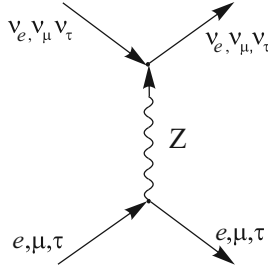


Рис. 7: Діаграма СМ, що описує взаємодію масивних лептонів та нейтрино завдяки обміну Z -бозоном в СМ та низькоенергетичному наближенні.

Це був величезний успіх, оскільки дозволив передбачити маси $W^\pm$ - та Z -бозонів. Справді, використавши (4.70), вираз для сталої Фермі (4.111) можна записати у вигляді

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{e^2}{M_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{M_W^2 \sin^2 \theta_W}, \quad (4.118)$$

звідки було отримано [60]: $M_W = 78.5 \pm 1.7$ GeV, $M_Z = M_W / \cos \theta_W = 89.3 \pm 2$ GeV. Вже у 1983 році $W^\pm$ - та Z -бозони були експериментально відкриті в ЦЕРНі на колайдері SPS з передбаченими значеннями мас (на сьогоднішній день $M_W = 80,385 \pm 0,015$ GeV, $M_Z = 91,187 \pm 0,0021$ GeV). Певна відмінність мас отриманих в експерименті і передбачених з теорії Фермі пояснюється тим, що теорія Фермі є низькоенергетичною і не враховує радіаційних поправок.

4.7 Чому лагранжіан СМ має бути саме таким? Погляд назад

Тепер, коли лагранжіан СМ вже отримано, зробимо крок назад і обговоримо питання чому стартові позиції для виведення лагранжіану СМ були обрані саме такими¹, які були зазначені у Розділі 4.1? Зараз це зробити набагато простіше, оскільки читач вже ознайомлений з математичним апаратом СМ.

¹Ідея написання цього розділу ґрунтується на [81].

Як вже зазначалося у Розділі 1, поштовхом до створення теорії слабких взаємодій та СМ було явище β -розпаду, яке вказувало на існування іншого виду взаємодії аніж електромагнітна. Багаточисельні експерименти у 1958 році дозволили відновити ефективний гамільтоніан взаємодії у формі (1.15).

В 1957 році Ц. Лі та Ч. Янг, а також Д. Швінгер [22, 23] показали, що при високих енергіях буде порушуватись умова унітарності для гамільтоніана Фермі з точковою взаємодією. Проблема полягає в тому, що переріз певного слабого процесу із взаємодією Фермі зростає квадратично з енергією частинок¹ $\sigma \sim G_F^2 E^2$. Однак, враховуючи, що переріз визначається через елемент матриці розсіяння, фізичний зміст якого є ймовірністю переходу системи з одного стану в інший і є обмеженою за модулем величиною, впливає, що переріз розсіяння має вести себе при великих енергіях як $\sigma < \frac{C}{E^2}$ (так звана умова унітарності), де C – певна стала [77]. Для вирішення проблеми порушення умови унітарності авторами робіт [22, 23] було запропоновано ввести заряджену масивну векторну частинку ($W^\pm$) – переносника слабкої взаємодії, див. Рис. 5 та Розділ 4.6.

Початковий лагранжіан зарядженого векторного масивного поля можна записати у вигляді

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2}W_{prim}^{+,\mu\nu}W_{\mu\nu,prim}^- + m_W^2 W^{+,\mu}W_\mu^- + \mathcal{L}_{weak}^{int}, \quad (4.119)$$

де $W_{prim}^{+,\mu\nu} = \partial^\mu W^{+,\nu} - \partial^\nu W^{+,\mu}$ – аналог тензора Максвелла в КЕД.

Оскільки нова частинка є електрично зарядженою, то вона має брати участь в електромагнітній взаємодії. Найпростішим способом введення такої взаємодії є подовження похідної. Якщо ми не хочемо виходити за межі абелевої $U(1)$ теорії, то похідну слід подовжити мінімальним чином:

$$\partial_\mu W_\nu^+ \rightarrow D_\mu W_\nu^+ = (\partial_\mu - ieA_\mu)W_\nu^+. \quad (4.120)$$

Тоді взаємодію поля W -бозонів з електромагнітним полем можна отри-

¹Це очевидно з міркувань розмірності. Справді, розмірність перерізу розсіяння є розмірністю площі поверхні, що в системі $\hbar = c = 1$ дає $[\sigma] = GeV^{-2}$. Розмірність сталої Фермі $[G_F] = GeV^{-2}$. Амплітуда слабого процесу $M_{fi} \sim G_F$, тобто переріз реакції має бути пропорційний $\sigma \sim |M_{fi}|^2 \sim G_F^2$. Відповідно при високих енергіях, коли можна знехтувати доданками з масами частинок, $\sigma \sim G_F^2 E^2$.

мати з кінетичного доданку

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}W_{prim}^{+,\mu\nu}W_{\mu\nu,prim}^{-} \rightarrow -\frac{1}{2}[D^{\mu}W^{+\nu}-D^{\nu}W^{+\mu}][D_{\mu}W_{\nu}^{-}-D_{\nu}W_{\mu}^{-}] = \\
& -\frac{1}{2}[(\partial^{\mu}-ieA^{\mu})W^{+\nu}-(\partial^{\nu}-ieA^{\nu})W^{+\mu}][(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})W_{\nu}^{-}-(\partial_{\nu}+ieA_{\nu})W_{\mu}^{-}] = \\
& -\frac{1}{2}W_{prim}^{+,\mu\nu}W_{\mu\nu,prim}^{-}-e^2[A^{\mu}A_{\mu}W^{+,\nu}W_{\nu}^{-}-A^{\mu}A^{\nu}W_{\nu}^{+}W_{\mu}^{-}]- \\
& -ie\{A_{\mu}[W_{\nu}^{-}\partial^{\mu}W^{+,\nu}-\partial^{\mu}W_{\nu}^{-}W^{+,\nu}]-A_{\nu}[W_{\mu}^{-}\partial^{\mu}W^{+\nu}-W_{\mu}^{+}\partial^{\mu}W^{-\nu}]\}.
\end{aligned}$$

Звідки отримуємо лагранжіан взаємодії електромагнітного поля з полем W -бозонів:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W\gamma}^{int} = & -e^2[A^{\mu}A_{\mu}W^{+,\nu}W_{\nu}^{-}-A^{\mu}A^{\nu}W_{\nu}^{+}W_{\mu}^{-}]- \\
& -ieA_{\mu}\{[W_{\nu}^{-}\partial^{\mu}W^{+,\nu}-\partial^{\mu}W_{\nu}^{-}W^{+,\nu}]-[W_{\nu}^{-}\partial^{\nu}W^{+\mu}-W_{\nu}^{+}\partial^{\nu}W^{-\mu}]\}.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Чи можна з певних фізичних міркувань зрозуміти, чи є отриманий лагранжіан взаємодії коректним або ні? Виявляється, що відповідь можна отримати, розглянувши умову унітарності для процесів, що описуються зазначеним лагранжіаном взаємодії [77, 82].

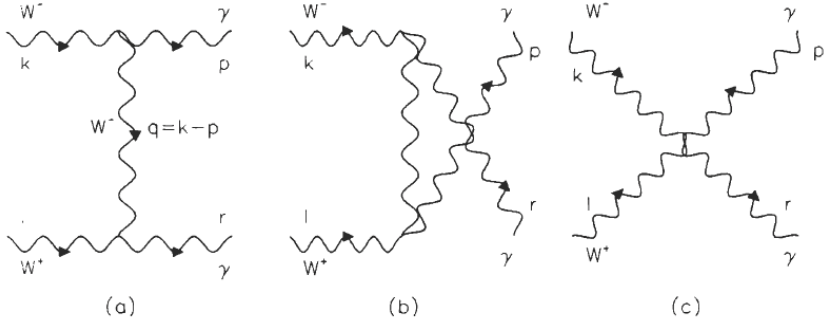


Рис. 8: Діаграми, що описують процес анігіляції пари W -бозонів у два фотони: $W^+ + W^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Рис. взятий з [77].

Розглянемо процес анігіляції пари W -бозонів у два фотони: $W^+ + W^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Він описується трьома діаграмами, див. Рис. 8. Амплітуди процесів перших двох діаграм ведуть себе при високих енергіях

налітаючих частинок $\sim E^4/m_W^4$, амплітуда третьої $\sim E^2/m_W^2$. Зазначені розбіжні доданки від різних діаграм не скорочуються. Тобто при енергіях $E \gtrsim m_W$ умова унітарності буде порушеною. Це означає, що взаємодія у формі (4.121) є нефізичною і її потрібно модифікувати.

Оскільки найбільшу розбіжність дають перші дві діаграми, що містять тричастинкові вершини, то слід модифікувати саме тричастинкову взаємодію. Тричастинкова взаємодія у другому рядку виразу (4.121) не містить похідних за електромагнітним полем. Тому штучно добавимо калібрувальну- та Лоренц-інваріантний доданок з похідними від електромагнітного поля у вигляді:

$$\mathcal{L}_{W\gamma}^{int} = -ie\kappa F^{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+, \quad (4.122)$$

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ – тензор Максвелла, а κ – підгоночна безрозмірна стала, значення якої слід знайти з умови унітарності амплітуди процесу. Такий доданок змінить вигляд тричастинкової взаємодії $WW\gamma$. В результаті, поблизу доданку, що зростатиме з енергією, буде коефіцієнт $\sim (\kappa - 1)^2 E^4/m_W^4$. Отже, коефіцієнт κ для виконання умови унітарності має дорівнювати $\kappa = 1$. Зазначимо, що при виборі $\kappa = 1$ скоротяться і інші доданки, що зростають зі збільшенням енергії, і амплітуда реакції при великих енергіях вийде на сталие значення.

Тепер виникає питання, як обґрунтувати появу в лагранжіані доданку (4.122), адже в рамках підходу локальної калібрувальної інваріантності групи $U(1)$ такого доданку не має бути!

Розглянемо підхід локальної калібрувальної інваріантності групи $SU(2)$. Кінетичний доданок в такому підході (4.31) матиме вигляд

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 V^{i,\mu\nu} V_{\mu\nu}^i, \quad (4.123)$$

де

$$V_{\mu\nu}^i = \partial_\mu V_\nu^i - \partial_\nu V_\mu^i + g \epsilon^{ijk} V_\mu^j V_\nu^k. \quad (4.124)$$

За аналогією з (4.73), легко отримати

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu V_\nu^i - \partial_\nu V_\mu^i) (\partial^\mu V^{i,\nu} - \partial^\nu V^{i,\mu}) = \\ & = -\frac{1}{4} V_{\mu\nu}^3 V^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{-,\nu} - \partial^\nu W^{-,\mu}), \end{aligned} \quad (4.125)$$

де введено позначення

$$V_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu V_\nu^3 - \partial_\nu V_\mu^3, \quad W_\mu^\pm = \frac{V_\mu^1 \mp iV_\mu^2}{\sqrt{2}}. \quad (4.126)$$

Загальні перетворення мають вигляд, див. (4.75),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 V_{\mu\nu}^i V^{i,\mu\nu} = & -\frac{1}{4} V_{\mu\nu}^3 V^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+,\mu\nu} - ig V^{3,\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+ + \\ & + \frac{g^2}{4} (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) (W^{-,\mu} W^{+,\nu} - W^{+,\mu} W^{-,\nu}), \end{aligned} \quad (4.127)$$

де введено позначення

$$W_{\mu\nu}^- = (\partial_\mu + ig V_\mu^3) W_\nu^- - (\partial_\nu + ig V_\nu^3) W_\mu^-. \quad (4.128)$$

Отже, ми отримали, що необхідний для виконання умови унітарності доданок (4.122) природнім чином виникає, якщо припустити, що поле переносника слабкої взаємодії (поле $W^\pm$ -бозонів) є наслідком локальної калібрувальної інваріантності лагранжіана СМ відносно групи $SU(2)$, поле V^3 є електромагнітним полем та заряд $g = e$!

Якщо припустити існування групи симетрії $SU(2)$, то ферміонні поля, які беруть участь у слабкій взаємодії, мають утворювати ізотопічні дублети. Виходячи з явного вигляду ефективного гамільтоніану слабкої взаємодії (1.15), що був отриманий з аналізу експериментальних даних ще у 1958 році, зрозуміло, що ізотопічні дублети ферміонів мають складатися лише з лівих частинок!

Подивимось, ще справді незаряджене поле V^3 можна трактувати як електромагнітне поле? Для цього потрібно розглянути доданки його взаємодії з ферміонами, див. (4.66)

$$\begin{aligned} i\bar{L}_n \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_n = & i(\bar{\nu}_{Ln}, \bar{e}_{Ln}) \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig \sum_{i=1}^3 T_W^i V_\mu^i \right) \begin{pmatrix} \nu_{Ln} \\ e_{Ln} \end{pmatrix} = \\ = & i \left[\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{Ln} + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu \partial_\mu e_{Ln} - \right. \\ & \left. - i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} - \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln}) \frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} + \bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu e_{Ln} W_\mu^+ + \bar{e}_{Ln} \gamma^\mu \nu_{Ln} W_\mu^- \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Можна побачити, що взаємодія лівих ферміонів з $W^\pm$ -бозонами є правильною. Але можна побачити і наявність взаємодії V^3 -бозонів з нейтрино, що не відповідає дійсності, якщо вважати поле V^3 електромагнітним полем! Також можна побачити, що поле V^3 взаємодіє лише з лівими електронами, а електромагнітне поле має однаково взаємодіяти як з лівими, так і з правими зарядженими ферміонами. Більш того, ми отримаємо масивність поля V^3 , якщо розглянути спонтанне порушення симетрії в $U(2)$ -симетричній теорії. Масивні доданки калібрувальних полів у цьому випадку легко отримати з виразу (4.49), у якому слід занулити поле B . Отримаємо

$$\mathcal{L}_m^{gauge} = \frac{g^2 v^2}{4} W^{-,\mu} W_\mu^+ + \frac{g^2 v^2}{8} V^{3,\mu} V_\mu^3. \quad (4.130)$$

Отже, поле V^3 є масивним і це є ще однією причиною, чому його не можна трактувати як електромагнітне поле.

Отже, за допомогою лише групи симетрії $SU(2)$ для лагранжіану лівих ферміонів нам не вдалося ввести електромагнітне поле. З іншого боку, відмовитися від групи $SU(2)$ ми також не можемо, бо дана група дає правильну, не мініальну взаємодію між $W^\pm$ -бозонами та іншим калібрувальним полем (має бути електромагнітне поле¹), а також відновлює гамільтоніан слабкої взаємодії (1.15). Тоді треба припустити, що для опису електромагнітного поля нам додатково потрібно ввести до лагранжіану $U(1)$ -симетрію, бо взаємодія електромагнітного поля з зарядженими полями матерії є мінімальна і тензор Максвела електромагнітного поля (який добре відомий з експериментів) є таким, що відповідає абелевій теорії.

Саме з цих міркувань і було запропоновано розглядати симетрію СМ як $U(1) \times SU(2)$. В цьому випадку в теорії з'являлися 4 калібрувальних безмасові поля $W^\pm$, V^3 та B . Це означало, що замість одного нейтрального калібрувального поля (електромагнітного) мало існувати ще одне нейтральне поле. Після спонтанного порушення симетрії та діагоналізації масових доданків калібрувальних полів в СМ на решті вводилися безмасове електромагнітне поле та поле масивних Z -бозонів. При цьому завдяки правильному підбору значень гіперзарядів групи $U_Y(1)$ електромагнітне поле однаково взаємодіяло як з частинками правої, так і лівої кіральності. А взаємодія поля Z -бозонів

¹Проблема вирішиться в рамках розширеної теорії, див (4.74) та (4.75).

з частинками лівої та правої кіральності відбувалася по-різному. Саме цей факт дозволив експериментально відкрити нейтральні слабкі струми (Z -бозони) вже у 1973 році, лише через 5 років після їх теоретичного передбачення.

Включення ж $SU(3)$ симетрії сильної взаємодії було обумовлене створенням у 1964 році М. Гелл-Манном та Д. Цвейгом кваркової моделі для пояснення великої кількості адронів [28]. В рамках цієї моделі вони змогли систематизувати різноманіття існуючих адронів на основі симетрії групи $SU(3)$.

Слід відзначити, що СМ модель, що заснована на $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ симетрії, ізотопічних дублетах лівих ферміонів та принципі спонтанного порушення симетрії повністю узгоджується з вимогою унітарності теорії. Цим зокрема обумовлено однакове значення заряду (сталого g) у взаємодії полів групи $SU_W(2)$. Яскравим прикладом самоузгодженості СМ є процес електрон-позитронної анігіляції в пару $W^\pm$ -бозонів. Для виконання умови унітарності зазначеного процесу необхідно врахувати діаграми, де переносниками взаємодії є нейтрино, фотон, Z -бозон та бозон Хіггса [77, 82], див. Рис. 9.

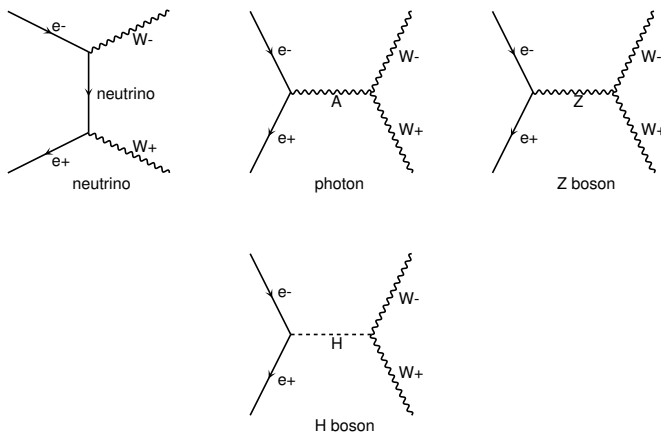


Рис. 9: Діаграми, що забезпечують унітарність процесу $ee^+ \rightarrow W^+W^-$. Рис. взятий з [82].

4.8 Глобальні симетрії СМ

Ми вже знаємо, що лагранжіан СМ є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень групи $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$. Її наслідком є існування калібрувальних полів, що забезпечують електроманітну, слабку та сильну взаємодії в СМ. Очевидно, що лагранжіан СМ повинен мати також інваріантність відносно певних глобальних перетворень, що, згідно з теоремою Ньотер (див. детальніше [56]), повинно призводити до існування певних величин, що зберігаються у часі. Отже, розглянемо глобальні симетрії СМ.

По-перше, слід відзначити *закон збереження електричного заряду* Q в реакціях, що обумовлений наявністю глобальної $U_{em}(1)$ симетрії після спонтанного порушення симетрії. Значення електричного заряду окремих частинок задані в Табл. 1 на сторінці 102, до якої слід додати значення електричного заряду калібрувальних полів та бозону Хіггса: $Q_{W^+} = 1$, $Q_{W^-} = -1$, $Q_Z = 0$, $Q_\gamma = 0$, $Q_h = 0$.

Легко побачити, що та частина лагранжіана СМ, котра містить лептонні функції, тобто $\mathcal{L}_{lept}^{free} + \mathcal{L}_{f,em} + \mathcal{L}_{f,weak} + \mathcal{L}_Y$, має симетрію відносно одночасних глобальних перетворень польових функцій окремих лептонних поколінь¹:

$$\begin{cases} \nu_n \rightarrow e^{i\alpha_n} \nu_n \\ e_n \rightarrow e^{i\alpha_n} e_n \end{cases}, \quad \text{відповідно} \quad \begin{cases} \bar{\nu}_n \rightarrow e^{-i\alpha_n} \bar{\nu}_n \\ \bar{e}_n \rightarrow e^{-i\alpha_n} \bar{e}_n \end{cases}. \quad (4.131)$$

Якщо кожному з поколінь присвоїти певне число (отримало назву лептонного числа) таким чином, що $L_e = 1$, $L_\mu = 1$, $L_\tau = 1$ для кожної частинки з пари (e, ν_e) , (μ, ν_μ) , (τ, ν_τ) відповідно та $L_e = -1$, $L_\mu = -1$, $L_\tau = -1$ для кожної античастинки з пари, то будуть виконуватися закони збереження лептонного числа для кожного покоління окремо:

$$\sum_i L_e^i = (N_e + N_{\nu_e}) - (N_{e^+} + N_{\bar{\nu}_e}) = const, \quad (4.132)$$

$$\sum_i L_\mu^i = (N_\mu + N_{\nu_\mu}) - (N_{\mu^+} + N_{\bar{\nu}_\mu}) = const, \quad (4.133)$$

$$\sum_i L_\tau^i = (N_\tau + N_{\nu_\tau}) - (N_{\tau^+} + N_{\bar{\nu}_\tau}) = const, \quad (4.134)$$

¹Лептонні заряди нейтрино та відповідного зарядженого лептона пов'язані доданком їх взаємодії з W бозоном.

де число N_i можна розуміти як число частинок i в реакції.

Це означає, що в конкретних реакціях сума окремих лептонних чисел (електронного, мюонного та τ -числа) частинок до реакції та після неї повинна зберігатися. Наприклад, реакція

$$\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

є дозволеною, а реакція

$$\mu \rightarrow e + \gamma$$

є забороненою¹.

Перейдемо тепер до КХД. Лагранжіан СМ має симетрію відносно глобальних перетворень польових функцій кварків, що є однаковими для всіх поколінь кварків,

$$q \rightarrow e^{i\alpha/3} q, \quad \bar{q} \rightarrow \bar{q} e^{-i\alpha/3}. \quad (4.135)$$

Відповідно, в системі буде зберігатися нове квантове число, що отримало назву *баріонного числа*:

$$B = \frac{1}{3}(N_q - N_{\bar{q}}), \quad (4.136)$$

де N_q – число кварків, а $N_{\bar{q}}$ – число антикварків у реакції.

Відповідно до цього визначення, баріонне число одного кварка є $1/3$, а антикварка $-1/3$. Тоді баріонне число будь якого баріону (складається з трьох кварків) буде дорівнювати 1, а баріонне число антибаріону (складається з трьох антикварків) дорівнюватиме -1 . При цьому баріонні числа мезонів (складаються з кварку та антикварку) будуть дорівнювати нулю. Відповідно, *закон збереження баріонного числа* для баріонів матиме вигляд

$$B = N_B - N_{\bar{B}}, \quad (4.137)$$

де N_B – число баріонів, а $N_{\bar{B}}$ – число антибаріонів у реакції.

Саме завдяки закону збереження баріонного числа протон, як найлегша частинка з одиничним баріонним зарядом, не може розпастися і є стабільним².

¹Насправді, у природі закон збереження лептонного числа є порушеним. Про це свідчать спостереження нейтринних осциляцій, коли нейтрино одного аромату переходить у стан іншого аромату, див. Розділ 5.1.

²Сучасне обмеження на час життя протона складає $\tau_p > 10^{32} - 10^{33}$ років залежно від моди розпаду. При температурах більших за масштаб електрослабкого переходу $T > T_{EW} \simeq M_W \simeq 100$ Гев у СМ існують механізми, завдяки яким може відбуватися порушення баріонного числа [75].

Відзначимо, що ми не можемо забезпечити симетрію відносно перетворень кожного з поколінь кварків окремо, як у лептонному випадку, завдяки наявності змішування кварків різних поколінь у слабкому секторі СМ через матрицю ККМ. Однак лагранжіан сильної взаємодії (4.95) є інваріантним відносно перетворень кожного з ароматних станів кварків окремо. Тому кожному з кварків можна приписати відповідні заряди (ароматові заряди), що будуть зберігатися в процесах, обумовлених сильними взаємодіями. Такі заряди отримали назви відповідно до назв кварків: дивність (s -кварк), чарівність (c -кварк), краса (b -кварк) та правдивість (t -кварк). Для кварків u та d , історично, такі заряди отримали назву проєкцій сильного ізотопічного спіну (I_3^s). Це природньо пов'язано з тим, що навіть після набуття кварками маси, в першому наближенні, u та d кварки можна вважати частинками однакової маси і вважати їх частинками одного ізотопічного дублету. Для інших кварків таке припущення вже не можна зробити. Для кращого розуміння наведемо таблицю зарядових чисел кварків, див. Табл. 2.

кварк	Q	B	I_3^s	c	s	t	b
u	$+2/3$	$1/3$	$+1/2$	0	0	0	0
d	$-1/3$	$1/3$	$-1/2$	0	0	0	0
c	$+2/3$	$1/3$	0	$+1$	0	0	0
s	$-1/3$	$1/3$	0	0	-1	0	0
t	$+2/3$	$1/3$	0	0	0	$+1$	0
b	$-1/3$	$1/3$	0	0	0	0	-1

Табл. 2: Заряди кварків: електричний Q , баріонний B , проєкція сильного ізоспіну на третю вісь I_3^s , чарівність c , краса b , правдивість t .

Як можна побачити з Табл. 2, для шести кварків існує 7 квантових чисел. Це означає, що наведені квантові числа не є незалежними. У фізиці сильних взаємодій уводиться аналог співвідношення Гелл-Манна-Нішиджими (4.19):

$$Q = I_3^s + \frac{Y^s}{2}, \quad Y^s = \frac{B + c + s + b + t}{2}. \quad (4.138)$$

Закон збереження зарядів у сильних взаємодіях є зручним для

аналізу процесів у СМ. Якщо в результаті реакції змінився кварковий (ароматний) склад початкових та кінцевих частинок, то реакція відбулася за рахунок обміну $W^\pm$ -бозонами і була обумовлена слабкою взаємодією. Частинки, що розпадаються завдяки слабкій взаємодії, мають характерний час життя $> 10^{-12}$ сек. Якщо ж у результаті реакції кварковий (ароматовий) склад частинок не змінився, то реакція могла відбутися завдяки сильним взаємодіям. Частинки, що розпадаються завдяки сильній взаємодії, мають характерний час життя $10^{-20} - 10^{-23}$ сек.

Для повноти інформації слід зазначити, що ми розглянули інваріантність лагранжіана СМ відносно певних типів глобальних перетворень групи $U(1)$ та зробили висновки щодо збереження певних квантових чисел, використовуючи теорему Ньотер для теорії класичних полів. Однак при розгляді квантованої теорії виникають певні особливості – квантові аномалії, котрі проявляють себе у порушенні законів збереження, що виконуються у класичному випадку. Мова йде про *кіральну аномалію*. Справа в тому, що в теорії класичних полів для аксіального струму $j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi$, виходячи з рівнянь Дірака, виконується співвідношення:

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (4.139)$$

Тобто аксіальний струм має зберігатися лише для безмасових ферміонів. Однак розгляд цього питання у вторинноквантованій теорії поля дає результат [63]:

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi - \frac{q^2}{8\pi^2} F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta}, \quad (4.140)$$

що свідчить про незбереження аксіального струму навіть у безмасовому випадку (q – відповідна стала зв'язку). Тут $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}F^{\gamma\sigma}$ – тензор, дуальний до тензора $F^{\alpha\beta}$. Із фізичної точки зору, струм j_μ^5 є різницею струму право- та лівокіральних ферміонів, див. Додаток 4:

$$\begin{aligned} j_\mu^5 &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma^5}{2}\psi - \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\psi = \\ &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi_R - \bar{\psi}\gamma_\mu\psi_L = \bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R - \bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Поняття кіральної аномалії є принципово важливим для СМ, оскільки в СМ взаємодію ліво- та правокіральных ферміонів із векторними

бозонами можна представити як взаємодію векторних та аксіальних струмів. При цьому аномалії мають місце в теоріях, де взаємодії ліво- та правокіральных ферміонів із векторними бозонами є різними. Саме такі взаємодії мають місце в СМ, де Z -бозон по різному взаємодіє з ферміонами правої та лівої киральності, а $W^\pm$ -бозон взаємодіє лише з лівими ферміонами.

На рівні квантової теорії поля киральна аномалія проявляє себе в трикутних ферміонних петлях, наприклад, такої, що входить в діаграму розсіяння нейтрино на нейтрино в 6 порядку теорії збурень, див. Рис. 10.

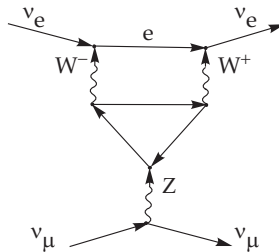


Рис. 10: Діаграма розсіяння нейтрино на нейтрино в 6 порядку теорії збурень. В трикутній петлі можуть пробігати всі ферміони СМ.

Виявляється, що наявність аномального доданку у законі збереження аксіального струму впливає на перенормованість відповідної теорії поля. Можна показати, що умовою скорочення аномальних доданків в СМ при врахуванні внесків всіх ферміонів в трикутній петлі є умова рівності нулю сумарного електричного заряду всіх частинок кожного з поколінь [63, 67]. Наприклад, для першого покоління матимемо

$$K = \sum_f q_f = q_e + q_{\nu_e} + 3(q_u + q_d) = -1 + 0 + 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0, \quad (4.142)$$

де ми врахували, що внесок дають кварки трьох кольорів. Киральна аномалія, що генерується в трикутній ферміонній петлі, буде пропорційна величині $K F \tilde{F}$ і дорівнюватиме нулю.

Як легко побачити, в СМ умова $K = 0$ явно виконується в межах кожного окремого покоління частинок. При цьому умова відсутності

кіральної аномалії не накладає обмежень на кількість поколінь СМ. Відповідно, якщо подальші експерименти покажуть існування додаткового лептона або кварка, це однозначно вказуватиме на необхідність існування і інших частинок нового покоління СМ.

Слід також відзначити, що явище кіральної аномалії може призвести до зміни кількості частинок з певною кіральністю навіть у випадку безмасових частинок¹. Справді, проінтегрувавши у безмасовому випадку співвідношення (4.140) за нескінченно великим просторовим об'ємом

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int d\vec{x} j_0^5 + \int d\vec{x} \frac{j_i^5}{dx^i} = -\frac{q^2}{8\pi^2} \int d\vec{x} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} \quad (4.143)$$

та врахувавши, що інтеграл за об'ємом від просторової похідної перейде у інтеграл за поверхнею, де польові функції дорівнюють нулеві, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (N_R - N_L) = -\frac{q^2}{8\pi^2} \int d\vec{x} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}. \quad (4.144)$$

Отже кількість правих та лівих частинок із часом може змінюватися за рахунок наявності кіральної аномалії та зовнішніх полів:

$$N_R(t_1) - N_R(t_0) - [N_L(t_1) - N_L(t_0)] = -\frac{q^2}{8\pi^2} \int_{t_0}^{t_1} dx^0 \int d\vec{x} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}. \quad (4.145)$$

Оскільки підінтегральний вираз можна представити у вигляді повної похідної від деякої функції $F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} = \partial^\nu T_\nu$, то інтеграл від нього може не дорівнювати нулю лише для конфігурацій поля з нетривіальною топологією, що може мати місце для полів груп $SU(N)$, $N > 1$. Ми повернемося до цього питання у Розділі 5.3, коли розглядатимемо баріонну асиметрію у Всесвіті.

¹Це питання є важливим для опису раннього Всесвіту до моменту спонтанного порушення симетрії. В ті часи лагранжіан СМ мав симетрію $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$, а поля матерії були безмасовими.

4.9 Властивості лагранжіану СМ відносно С-, Р-, Т-перетворень

Згідно з теоремою Людерса-Паулі (СРТ-теорема), *будь-яка лоренц-інваріантна локальна теорія поля з ермітовим гамільтоніаном повинна бути інваріантною відносно перетворень зарядового спряження (С), просторової інверсії (Р) та обернення часу (Т)*. Порядок дії операцій С-, Р-, Т-перетворень може бути довільним. Із теореми випливає, що порушення інваріантності відносно одного з перетворень може мати місце, але повинно компенсуватися дією іншого з перетворень.

Корисно навести деякі базові відомості про дію операторів С, Р, Т на деякі фізичні величини.

Оператор просторової інверсії

За визначенням, даний оператор змінює знак просторових координат певної точки, але не змінює часову координату, тобто

$$\hat{P}(x^0, \vec{x}) = (x_0, -\vec{x}), \quad \text{або} \quad \hat{P}x^\mu = x_\mu.$$

Легко отримати результат дії $\hat{P}$ на 4-імпульс частинки¹:

$$\hat{P} \gamma m \vec{v} = \hat{P} \gamma m \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma m \frac{-d\vec{x}}{dt} = -\gamma m \vec{v} = -\vec{p} \quad \text{та} \quad \hat{P} E = \hat{P} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = E,$$

отже

$$\hat{P}(p^0, \vec{p}) = (p_0, -\vec{p}), \quad \text{або} \quad \hat{P}p^\mu = p_\mu.$$

Оскільки в КЕД електромагнітне поле можна ввести як подовження імпульсу, то воно має перетворюватися під дією оператора просторової інверсії так само як і імпульс:

$$\hat{P} A^\mu = A_\mu, \quad \text{тобто} \quad \hat{P} A_0 = A_0, \quad \hat{P} A_i = -A_i. \quad (4.146)$$

При цьому електричне поле являє собою полярний вектор $\hat{P} \vec{E} = \hat{P} (\nabla A_0 - \partial_t \vec{A}) = -\vec{E}$, а магнітне поле, очевидно, є аксіальним вектором, тобто таким, що не змінюється при перетвореннях просторової інверсії $\hat{P} \vec{H} = \hat{P} [\nabla \times \vec{A}] = [(-\nabla) \times (-\vec{A})] = \vec{H}$. Отже

$$\hat{P} \vec{E} = -\vec{E}, \quad \hat{P} \vec{H} = \vec{H}. \quad (4.147)$$

Оскільки лагранжіан КЕД є інваріантним відносно перетворень просторової інверсії (спостерігається рівнозначність прямих та дзеркально відображених реакцій), то має бути інваріантним і доданок

¹ $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ – Лоренц-фактор.

взаємодії $\sim j^\mu A_\mu$. Звідси випливає, що під дією оператора просторової інверсії 4-вектор струму перетворюється так само, як і A^μ :

$$\hat{P} j^\mu = \hat{P} (j^0, \vec{j}) = (j^0, -\vec{j}) = j_\mu.$$

В загальному випадку векторні поля можуть змінюватися при перетвореннях просторової інверсії як

$$\hat{P} V^\mu = \eta_V V_\mu, \quad \eta_V = \pm 1,$$

при цьому при $\eta_V = 1$ поле називають векторним, а при $\eta_V = -1$ поле називають псевдовекторним¹. Аналогічно для скалярних полів

$$\hat{P} S = \eta_S S, \quad \eta_S = \pm 1.$$

У випадку $\eta_S = 1$ поле називають скалярним, а при $\eta_S = -1$ поле називають псевдоскалярним.

Розглянемо дію оператора просторової інверсії на орбітальний момент частинки

$$\hat{P} \vec{L} = \hat{P} [\vec{r} \times \vec{p}] = [(-\vec{r}) \times (-\vec{p})] = \vec{L}.$$

Оскільки спін частинки разом з орбітальним моментом утворюють повний момент $\vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$, то спін має перетворюватися так само, як і орбітальний момент:

$$\hat{P} \vec{L} = \vec{L}, \quad \hat{P} \vec{S} = \vec{S}, \quad \hat{P} \vec{J} = \vec{J}.$$

Відповідно для спіральності частинки (проекція спіну на напрямок руху) матимемо

$$\hat{P} (\vec{S} \cdot \vec{p}) = \vec{S} \cdot (-\vec{p}) = -\vec{S} \cdot \vec{p}.$$

З поняттям просторової інверсії пов'язаний *закон збереження просторової парності системи*, див. детальніше [60]. На простому рівні його можна зрозуміти з наступних міркувань. Оператор просторової інверсії двічі діючи на хвильову функцію частинки має давати ту саму функцію. Це означає, що дію оператора на хвильову функцію можна представити у вигляді $\hat{P}\psi = \pm\psi$. Тобто можуть існувати парні та непарні стани по відношенню до дії оператора просторової інверсії.

¹Незважаючи на те, що $\eta_V = 1$ для векторних полів, вважається що вони мають від'ємну парність (бо просторова частина змінює знак на протилежний). Аналогічно, псевдовекторні поля вважаються полями з додатньою парністю.

Для системи невзаємодіючих між собою частинок хвильова функція системи є добутком хвильових функцій окремих частинок, тоді парність системи буде визначатися добутком парностей хвильових функцій окремих частинок. Тоді задавши правило, за яким визначається парність однієї частинки та системи частинок, закон збереження просторової парності можна сформулювати у наступному вигляді. Якщо оператор гамільтоніана системи комутує з оператором просторової інверсії $[\hat{H}, \hat{P}]_- = 0$, то парність системи частинок буде зберігатися. Це означає, що визначивши парність системи частинок до реакції, після реакції система частинок має характеризуватися тією ж самою парністю.

Оператор зарядового спряження

За визначенням, оператор зарядового спряження переводить частинку в античастинку, змінюючи при цьому її заряд. Відповідно, дія оператора $\hat{C}$ на струм має вигляд

$$\hat{C} j^\mu = -j^\mu.$$

Оскільки КЕД є інваріантною теорією по відношенню до операції зарядового спряження (в експериментах спостерігається рівність амплітуд реакцій, у яких всі частинки замінено на античастинки), то інваріантним має бути і лагранжіан взаємодії $\sim j^\mu A_\mu$. Звідси випливає, що під дією оператора зарядового спряження 4-вектор електромагнітного поля має перетворюватися так само, як і j^μ :

$$\hat{C} A^\mu = -A^\mu, \quad (4.148)$$

тобто зарядово нейтральне електромагнітне поле має від'ємну парність по відношенню до операції зарядового спряження

$$\hat{C} \vec{E} = -\vec{E}, \quad \hat{C} \vec{H} = -\vec{H}. \quad (4.149)$$

Не зовсім очевидно, але можна показати [83], що

$$\hat{C} \vec{x} = \vec{x}, \quad \hat{C} \vec{p} = -\vec{p}, \quad \hat{C} \vec{L} = -\vec{L}, \quad \hat{C} \vec{\Sigma} = -\vec{\Sigma}, \quad \hat{C} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}.$$

Якщо система є зарядово нейтральною, то дія $\hat{C}$ на її хвильову функцію може призвести до появи лише фазового множника ± 1 . Тоді

задавши правило, за яким визначається зарядова парність системи частинок, можна сформулювати *закон збереження зарядової парності* у наступному вигляді. Якщо оператор гамільтоніана системи комутує з оператором зарядового спряження $[\hat{H}, \hat{C}]_- = 0$, то зарядова парність системи частинок буде зберігатися. Це означає, що визначивши зарядову парність системи частинок до реакції, після реакції система частинок має характеризуватися тією ж самою зарядовою парністю, детальніше див. [59, 84].

Оператор інверсії часу

За визначенням, даний оператор змінює знак часової координати:

$$\hat{T}(x^0, \vec{x}) = (-x_0, \vec{x}), \quad \text{або} \quad \hat{T}x^\mu = -x_\mu.$$

Легко отримати результат дії $\hat{T}$ на 4-імпульс частинки:
 $\hat{T}\gamma m\vec{p} = \hat{T}\gamma m \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma m \frac{d\vec{x}}{-dt} = -\vec{p}$ та $\hat{T}E = \hat{T}\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = E$, отже

$$\hat{T}(p^0, \vec{p}) = (p_0, -\vec{p}), \quad \text{або} \quad \hat{T}p^\mu = p_\mu.$$

Оскільки в КЕД електромагнітне поле можна ввести як подовження імпульсу, то воно має перетворюватися під дією оператора інверсії часу так само як і імпульс:

$$\hat{T}A^\mu = A_\mu, \quad \text{тобто} \quad \hat{T}A_0 = A_0, \quad \hat{T}A_i = -A_i. \quad (4.150)$$

При цьому електричне поле залишається незмінним, а магнітне поле змінює свій знак

$$\hat{T}E_i = \hat{T}F_{i0} = \hat{T}(\partial_i A_0 - \partial_{x_0} A_i) = E_i, \quad (4.151)$$

$$\hat{T}\vec{H} = \hat{T}[\nabla \times \vec{A}] = [\nabla \times (-\vec{A})] = -\vec{H}. \quad (4.152)$$

Останній вираз можна записати і в узагальненому вигляді через компоненти тензора Максвелла, враховуючи, що аксіальний вектор магнітного поля можна представити у вигляді $H_i = \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}F^{jk}$, $\epsilon_{0123} = -1$:

$$\hat{T}H_i = \hat{T}\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}F^{jk} = \hat{T}\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -H_i. \quad (4.153)$$

Тобто закон перетворення компонент електромагнітного поля при інверсії часу впливає з закону перетворень компонент тензора Максвелла:

$$\hat{T}F_{i0} = F_{i0}, \quad \hat{T}F_{jk} = -F_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (4.154)$$

Оскільки лагранжіан КЕД є інваріантним відносно перетворень інверсії часу (спостерігається рівність амплітуд прямих та обернених реакцій), то має бути інваріантним і доданок взаємодії $\sim j^\mu A_\mu$. Звідси випливає, що під дією оператора інверсії часу 4-вектор струму перетворюється так само, як і A^μ :

$$\hat{T} j^\mu = \hat{T} (j^0, \vec{j}) = (j^0, -\vec{j}) = j_\mu.$$

Розглянемо дію оператора інверсії часу на орбітальний момент частинки

$$\hat{T} \vec{L} = \hat{T} [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times (-\vec{p})] = -\vec{L}.$$

Оскільки спін частинки разом з орбітальним моментом утворюють повний момент $\vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$, то спін має перетворюватися так само, як і орбітальний момент:

$$\hat{T} \vec{L} = -\vec{L}, \quad \hat{T} \vec{S} = -\vec{S}, \quad \hat{T} \vec{J} = -\vec{J}.$$

Відповідно для спіральності частинки (проекція спіну на напрямок руху) матимемо

$$\hat{T} (\vec{S} \cdot \vec{p}) = -\vec{S} \cdot (-\vec{p}) = \vec{S} \cdot \vec{p}.$$

Дія С-, Р-, Т-перетворень на калібрувальні поля групи $SU(n)$

У випадку теорії з симетрією групи $SU(N)$ компоненти відповідного тензора Максвелла не змінюються під дією С- та Т-перетворень так, як компоненти тензора Максвелла групи $U(1)$. Це пов'язано з наявністю квадратичних за полями доданків у виразах для компонент тензора Максвелла у неабелевих теоріях. В результаті доданки калібрувального поля $F^{a,\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$ втратять інваріантність відносно С- та Т-перетворень. Щоб відновити зазначену інваріантність, потрібно модифікувати визначення С- та Т-перетворень.

Продемонструємо сказане на прикладі перетворень обернення часу. Похідна при фундаментальному представленні подовжується аналогічним чином як і для лагранжіану з симетрією групи $U(1)$: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ – значить найвішим чином узагальнене співвідношення (4.150) має виконуватися. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}\hat{T}E^a &= \hat{T}F_{i0}^a = \hat{T}[\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a + gC^{abc}A_i^b A_0^c] = \\ &= (\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a) - gC^{abc}A_i^b A_0^c \neq F_{i0}^a,\end{aligned}\quad (4.155)$$

$$\begin{aligned}\hat{T}H^a &= \hat{T}F_{jk}^a = \hat{T}[\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + gC^{abc}A_j^b A_k^c] = \\ &= -(\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a) + gC^{abc}A_j^b A_k^c \neq -F_{jk}^a, \quad j, k = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (4.156)$$

тобто величини H_i^a , E_i^a – неабелеві аналоги магнітного та електричних полів, див. (2.101) – не є парними, або непарними функціями по відношенню до перетворень обернення часу.

Тобто лагранжіан калібрувального поля

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} = \frac{1}{2}[(\vec{E}^a)^2 - (\vec{H}^a)^2]\quad (4.157)$$

буде містити доданки типу

$$gC^{abc}(\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a)A^{i,b}A^{0,c} \quad \text{та} \quad gC^{abc}(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)A^{i,b}A^{j,c}, \quad (4.158)$$

що не є інваріантними відносно перетворень обернення часу

$$\hat{T}[gC^{abc}(\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a)A^{i,b}A^{0,c}] = -gC^{abc}(\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a)A^{i,b}A^{0,c}, \quad (4.159)$$

$$\hat{T}[gC^{abc}(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)A^{i,b}A^{j,c}] = -gC^{abc}(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)A^{i,b}A^{j,c}. \quad (4.160)$$

Повністю аналогічно можна показати, що застосувавши перетворення зарядового спряження у формі (4.148), отримаємо

$$\hat{C}F_{i0}^a = \hat{C}[\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a + gC^{abc}A_i^b A_0^c] \neq -F_{i0}^a, \quad (4.161)$$

$$\hat{C}F_{jk}^a = \hat{C}[\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + gC^{abc}A_j^b A_k^c] \neq -F_{jk}^a, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (4.162)$$

тобто і величини H_i^a , E_i^a не є парними, або непарними функціями по відношенню до перетворень зарядового спряження.

Однак, при перетвореннях просторової інверсії (4.146), (4.147) симетрійні властивості тензора Максвелла зберігаються

$$\hat{P}F_{i0}^a = \hat{P}[\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a + gC^{abc}A_i^b A_0^c] = -F_{i0}^a, \quad (4.163)$$

$$\hat{P}F_{jk}^a = \hat{P}[\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + gC^{abc}A_j^b A_k^c] = F_{jk}^a, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (4.164)$$

тобто $\hat{P}H_i^a = H_i^a$, $\hat{P}E_i^a = -E_i^a$.

Для вирішення проблеми інваріантності лагранжіану калібрувальних полів відносно перетворень обернення часу в роботі [85] було запропоновано змінити визначення дії оператора обернення часу таким чином:

$$\hat{T}A_0^a = M^{ab}A_0^b, \quad (4.165)$$

$$\hat{T}A_i^a = -M^{ab}A_i^b, \quad (4.166)$$

де M – певна матриця, що має задовільняти умові

$$C^{abc}(M^{bd}A_\mu^d)(M^{cf}A_\nu^f) = -M^{ab}(C^{bdf}A_\mu^dA_\nu^f), \quad (4.167)$$

або, у спрощеному записі,

$$C^{abc}M^{bd}M^{cf} = -M^{ab}C^{bdf}. \quad (4.168)$$

Зазначена зміна дії оператора обернення часу дозволяє записати

$$\begin{aligned} \hat{T}E^a &= \hat{T}F_{i0}^a = \hat{T}[\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a + gC^{abc}A_i^b A_0^c] = \\ &= M^{am}(\partial_i A_0^m - \partial_0 A_i^m + gC^{mbc}A_i^b A_0^c) = M^{am}F_{i0}^m, \quad (4.169) \\ \hat{T}H^a &= \hat{T}F_{jk}^a = \hat{T}[\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + gC^{abc}A_j^b A_k^c] = \\ &= -M^{am}(\partial_j A_k^m - \partial_k A_j^m + gC^{mbc}A_j^b A_k^c) = -M^{am}F_{jk}^m, \quad j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Тоді для інваріантності лагранжіану (4.157) має виконуватися умова

$$M^{am}M^{an} = (M^T)^{ma}M^{an} = \delta^{mn}, \quad \text{тобто} \quad M^T M = 1. \quad (4.171)$$

Умовам (4.168) та (4.171) задовольняє матриця $M^{ab} = -\delta^{ab}$. Отже у випадку теорії калібрувальних полів можна модифікувати дію оператора обернення часу так, щоб він не змінював лагранжіан (4.157).

Для вирішення проблеми інваріантності лагранжіану калібрувальних полів відносно перетворень зарядового спряження дана операція визначається як заміна всіх полів, що перетворюються за певним представленням, на поля, що перетворюються за спряженим представленням даної групи.

У випадку калібрувального поля групи $U(1)$ це зводиться до заміни $A_\mu \rightarrow -A_\mu$, але у випадку неабелевих груп закон перетворення більш складний. Згідно з теорією, наведеною в Додатку, зарядово

спряжене матричне поле $\hat{C}A_\mu$ записується у вигляді розкладу за комплексно спряженими матрицями:

$$\hat{C}A_\mu = (-igT^a)^* A_\mu^a = +igT^{*a} A_\mu^a = /(\text{D1.15})/ = -igST^a S^{-1} A_\mu^a. \quad (4.172)$$

Оскільки генератори $ST^a S^{-1}$ задовільняють тим же співвідношенням, що й T^a , див. (D1.6) та (D1.7), то величина $F_{\mu\nu}^a$ у розкладі

$$\hat{C}F_{\mu\nu} = -igST^a S^{-1} F_{\mu\nu}^a \quad (4.173)$$

буде тією ж, що і в розкладі $F_{\mu\nu}$.

Легко побачити, що

$$Tr[A^\mu A_\mu] = Tr[\hat{C}A^\mu \hat{C}A_\mu] = -\frac{g^2}{2} A^{a,\mu} A_\mu^a, \quad (4.174)$$

$$Tr[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = Tr[\hat{C}F^{\mu\nu} \hat{C}F_{\mu\nu}] = -\frac{g^2}{2} F^{a,\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (4.175)$$

а отже лагранжіан буде інваріантним відносно визначеної таким чином операції зарядового спряження.

Застосування С-, Р-, Т-перетворень до доданків лагранжіану СМ

Наявність у системі інваріантності відносно окремих та комбінованих С-, Р-, Т-перетворень накладає суттєві обмеження на можливі реакції між частинками та на властивості частинок. Зокрема, інваріантність відносно Р-перетворень означає справедливність закону збереження просторової парності у реакціях (рівнозначність прямих та дзеркально відображених реакцій); інваріантність відносно перетворень зарядового спряження означає справедливність закону збереження зарядової парності у реакціях (рівнозначність реакцій, у яких всі частинки замінено на античастинки); інваріантність відносно Т-перетворень означає виконання принципу детальної рівноваги (рівність амплітуд прямих та обернених процесів). Комбінована СР-інваріантність означає однакову амплітуду реакцій, що переходять одна в іншу шляхом дзеркального відображення та заміною частинок на античастинки (зі зміною знаку спіральності). Нарешті, загальна СРТ-інваріантність теорії означає чітку відповідність між частинками та античастинками, а саме: рівність мас, магнітних моментів, електричних зарядів (за модулем), спінів (за модулем).

	$\phi(x^0, \vec{x})$	$\varphi(x^0, \vec{x})$	$V_\mu(x^0, \vec{x})$	$U_\mu(x^0, \vec{x})$
C	$\phi^*(x^0, \vec{x})$	$\eta_\phi^C \varphi(x^0, \vec{x})$	$V_\mu^*(x^0, \vec{x})$	$\eta_U^C U_\mu(x^0, \vec{x})$
P	$\eta_\phi^P \phi(x^0, -\vec{x})$	$\eta_\varphi^P \varphi(x^0, -\vec{x})$	$\eta_V^P V^\mu(x^0, -\vec{x})$	$\eta_U^P U^\mu(x^0, -\vec{x})$
T	$\eta_\phi^P \phi^*(-x^0, \vec{x})$	$\eta_\varphi^C \eta_\varphi^P \varphi(-x^0, \vec{x})$	$-\eta_V^P V^{*\mu}(-x^0, \vec{x})$	$-\eta_U^C \eta_U^P U^\mu(-x^0, \vec{x})$
CPT	$\phi(-x^0, -\vec{x})$	$\varphi(-x^0, -\vec{x})$	$-V_\mu(-x^0, -\vec{x})$	$-U_\mu(-x^0, -\vec{x})$

Табл. 3: Дія С-,Р-,Т-перетворень на скалярні (заряджені ϕ та нейтральні φ) та векторні (заряджені V та нейтральні U) поля [59,68]. Параметр $\eta^P = +1$ відповідає скалярним та векторним полям, $\eta^P = -1$ відповідає псевдоскалярним та псевдовекторним полям. Параметр $\eta^C = +1$ відповідає зарядово-парним, $\eta^C = -1$ зарядово-непарним нейтральним полям.

Для аналізу властивостей перетворень окремих доданків лагранжіана СМ відносно окремих та комбінованих операцій С-, Р-, Т-перетворень зручно використати властивості перетворень скалярних та векторних полів, див. Табл. 3, ферміонних білінійних форм, див. Табл. 4, та згадати визначення псевдоскалярних та псевдовекторних величин, див. Додаток 3.

Зазначимо, що нижні рядки у Табл. 3 – 4 відповідають правилу дії СРТ-перетворень, а саме: $\hat{C}\hat{P}\hat{T}\varphi(x^0, \vec{x}) = \varphi(-x^0, -\vec{x})$ для скалярних та псевдоскалярних полів; $\hat{C}\hat{P}\hat{T}A_\mu(x^0, \vec{x}) = -A_\mu(-x^0, -\vec{x})$ для векторних та псевдовекторних полів; $\hat{C}\hat{P}\hat{T}F_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = F_{\mu\nu}(-x^0, -\vec{x})$ для тензорів та псевдотензорів, оскільки тензор можна представити як добуток векторних полів, а псевдотензор – як добуток векторного та

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
C	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1
P	+1	-1	$(-1)^\mu$	+1	$-(-1)^\mu$	-1	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	+1	-1	$(-1)^\mu$	+1	$(-1)^\mu$	+1	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
CPT	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1

Табл. 4: Дія С-,Р-,Т-перетворень на ферміонні білінійні форми [68]. Для скорочення записів уведено позначення $(-1)^\mu = 1$ для $\mu = 0$, $(-1)^\mu = -1$ для $\mu = 1, 2, 3$. Аргументи полів у білінійних комбінаціях змінюються аналогічно до Табл. 3.

псевдовекторного полів. Дані правила були введені за аналогією до дії РТ-перетворень на скаляр та 4-вектор $(x^0, \vec{x})$ у класичній фізиці, а потім узагальнені на дію оператора зарядового спряження. Фіксація дії СРТ-перетворень означає певну довільність у виборі знаків при окремих С-, Р-, Т-перетвореннях, адже головним є правильне значення добутку зазначених коефіцієнтів.

У СМ поле Хігса вважається скалярним полем $\eta_H^P = 1$, електромагнітне поле – векторним, зарядово-непарним полем ($\eta_A^P = 1, \eta_A^C = -1$).

З аналізу наведених таблиць випливає, що лагранжіан квантової хромодинаміки $\mathcal{L}_{QCD}$ (4.95) та лагранжіан квантової електродинаміки (доданки $\mathcal{L}_{lept}^{free}$ (4.104) та $\mathcal{L}_{f,em}^{int}$ (4.105)) є інваріантними відносно дії кожного окремого С-, Р-, Т-перетворення¹.

Розглянемо лагранжіан слабкої взаємодії $\mathcal{L}_{f,weak}^{int}$ (4.106). Запишемо дію операторів $\hat{C}$ та $\hat{P}$ на ферміонну частину лагранжіана

$$\hat{P}\bar{f}\gamma^\mu(a+b\gamma^5)g = (-1)^\mu \bar{f}\gamma^\mu(a-b\gamma^5)g, \quad (4.176)$$

$$\hat{C}\bar{f}\gamma^\mu(a+b\gamma^5)g = -\bar{g}\gamma^\mu(a-b\gamma^5)f, \quad (4.177)$$

де f, g певні ферміонні поля. Як бачимо, окремі $\hat{C}$ та $\hat{P}$ операції змінюють знак поблизу матриці γ^5 . Отже, лагранжіан слабкої взаємодії не є інваріантним відносно окремих С- та Р-перетворень. Комбінована дія $\hat{P}\hat{C}$ дає результат

$$\hat{C}\hat{P}\bar{f}\gamma^\mu(a+b\gamma^5)g = -(-1)^\mu \bar{g}\gamma^\mu(a+b\gamma^5)f. \quad (4.178)$$

Відповідно, поля $W^\pm$ - та Z -бозонів беруть участь у реакціях, де не виконуються окремо закони збереження просторової та зарядової парності, отже, не є коректним говорити про відповідні парності зазначених бозонів. Однак дію СР-перетворень на $W^\pm$ - та Z -бозони можна визначити як²:

$$\hat{C}\hat{P}Z_\mu = -Z^\mu = -(-1)^\mu Z_\mu, \quad \hat{C}\hat{P}W_\mu^\pm = -W^{\mp,\mu} = -(-1)^\mu W_\mu^\mp. \quad (4.179)$$

Тоді у лептонному секторі слабкої взаємодії (4.106) матимемо комбіновану СР-інваріантність (перший із доданків взаємодії лептонів з W -бозоном у виразі (4.106) під дією СР-перетворень переходить у другий доданок та навпаки), а значить, згідно з СРТ-теоремою, матимемо і Т-інваріантність:

¹ Кінетичний доданок поля нейтрино інваріантний відносно СР-перетворення.

² Взявши до уваги співвідношення (4.146) та (4.148) легко отримати аналогічне співвідношення і для поля фотонів: $\hat{C}\hat{P}A_\mu = -A^\mu = -(-1)^\mu A_\mu$.

$$\begin{aligned}\hat{C}\hat{P}\bar{f}\gamma^\mu\left[t_3^f(1-\gamma^5)-2q_f\sin^2\theta_W\right]fZ_\mu &= \bar{f}\gamma^\mu\left[t_3^f(1-\gamma^5)-2q_f\sin^2\theta_W\right]fZ_\mu, \\ \hat{C}\hat{P}\bar{\nu}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)e_nW_\mu^+ &= \bar{e}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_nW_\mu^-.\end{aligned}\quad (4.180)$$

У кварковому секторі слабкої взаємодії (4.106) ситуація дещо відрізняється за рахунок наявності матриці змішування кварків Кабіббо-Кобаяши-Маскава V (4.89), а саме:

$$\hat{C}\hat{P}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)VdW_\mu^+ = \bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V^TuW_\mu^-, \quad (4.181)$$

$$\hat{C}\hat{P}\bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V^+uW_\mu^- = \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V^*dW_\mu^+. \quad (4.182)$$

Тобто дані вирази будуть переходити один в інший лише за умови дійсності матриці Кабіббо-Кобаяши-Маскава. Однак, згідно з експериментальними даними, матриця КKM є комплексною (4.90). Це означає порушення СР-інваріантності у кварковому секторі слабких взаємодій, а значить, відповідно до СРТ-теореми, і порушення Т-інваріантності. Для слабких процесів у кварковому секторі справедливою є лише інваріантність відносно одночасної дії СРТ-перетворень.

Важливо також розглянути окремі можливі доданки лагранжіану калібрувальних полів, а саме $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ та $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, де $\tilde{F}$ є дуальним тензором до тензора F :

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (4.183)$$

а $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ є повністю антисиметричним тензором Леві-Чевіті, елементи якого є одиниці, мінус одиниці та нулі. При цьому елемент тензора з двома однаковими індексами дорівнює нулю, а елементи, що відрізняються перестановкою двох сусідніх індексів, змінюють свій знак. При цьому, за визначенням,

$$\epsilon_{0123} = -1, \quad \epsilon^{0123} = +1 \quad (4.184)$$

та, наприклад, $\epsilon_{0132} = +1$, $\epsilon^{1023} = -1$.

Можна показати, що доданок лагранжіану типу $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ можна представити у вигляді повної похідної від певного 4-вектора, див. детальніше Розділ 6.1,

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \partial^\mu K_\mu. \quad (4.185)$$

Відповідно, такий доданок у лагранжіані не змінить рівнянь руху. Для калібрувальних полів групи $U(1)$ внесок у дію від доданку (4.185) дорівнює нулю, оскільки інтеграл за d^4x від дивергенції певного вектора дає інтеграл за поверхнею області інтегрування, на якій польові

функції калібрувального поля дорівнюють нулю. Саме тому в лагранжіані КЕД доданок (4.185) відсутній. Однак для калібрувальних полів групи $SU(n)$, $n \geq 2$ внесок у дію від доданку (4.185) не дорівнює нулю, оскільки в неабелевих теоріях існують такі розв'язки відповідних рівнянь руху, коли польові функції калібрувального поля не дорівнюють нулю на нескінченно віддаленій поверхні і загальна енергія таких польових розв'язків є скінченною. Отже в неабелевих теоріях доданки до лагранжіану (4.185) можуть мати вплив на опис стану фізичної системи, див. детальніше Розділ 6.1.

Використавши явний вигляд (2.101), отримаємо

$$F_{\mu\nu}^a = \begin{pmatrix} 0 & -E_x^a & -E_y^a & -E_z^a \\ E_x^a & 0 & H_z^a & -H_y^a \\ E_y^a & -H_z^a & 0 & H_x^a \\ E_z^a & H_y^a & -H_x^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \begin{pmatrix} 0 & -H_x^a & -H_y^a & -H_z^a \\ H_x^a & 0 & -E_z^a & E_y^a \\ H_y^a & E_z^a & 0 & -E_x^a \\ H_z^a & -E_y^a & E_x^a & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.186)$$

звідки можна отримати вирази для згорток

$$F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} = -2 \left[(\vec{E}^a)^2 - (\vec{H}^a)^2 \right], \quad (4.187)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} = 4 \vec{E}^a \vec{H}^a. \quad (4.188)$$

Вираз (4.187) виникає як кінетичний доданок калібрувальних полів в усіх лагранжіанах відповідної групи симетрії. Як було розглянуто раніше, він є інваріантним відносно окремих С-, Р-, Т-перетворень.

Вираз (4.188) не входить в лагранжіан СМ, але він є калібрувально інваріантним і в принципі може бути доданий до лагранжіанів фізичних теорій, див. детальніше Розділ 6.1. Легко показати, див. (4.163), (4.164), (4.169), (4.170), (4.173), що даний доданок порушує Р- та Т-інваріантність, але зберігає інваріантність відносно С-перетворень:

$$\hat{T}[\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \sim \hat{T}[F_{i0}^a F_{jk}^a] = M^{am} F_{i0}^m (-M^{am}) F_{jk}^m = -F_{i0}^a F_{jk}^a, \quad (4.189)$$

$$\hat{P}[\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \sim \hat{P}[F_{i0}^a F_{jk}^a] = -F_{i0}^a F_{jk}^a, \quad (4.190)$$

$$\hat{C}[\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \sim \text{Tr}[S T^a S^{-1} S T^b S^{-1}] [F_{i0}^a F_{jk}^b] = \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.191)$$

В літературі прийнято вказувати, що вираз (4.188) є доданком, що порушує СР-інваріантність.

4.10 Чисельні значення параметрів СМ

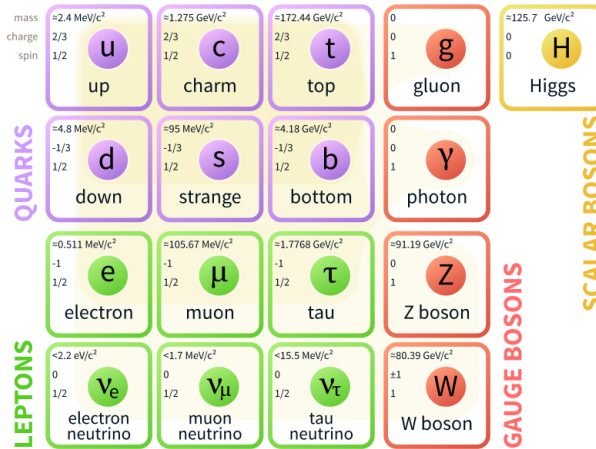


Рис. 11: Частинки СМ та їх характеристики: спин, заряд, маса. Джерело рисунку https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_interaction

Наведемо підсумкову таблицю всіх елементарних частинок СМ, див. Рис. 11. Звертаємо увагу, що на маси нейтрино накладені обмеження зверху з кінематичних характеристик реакцій за участі відповідних нейтрино. Детальніше про маси нейтрино див. Розділ 5.1.

Знаючи маси елементарних частинок та вакуумного середнього поля Хігса (4.115) можна відновити значення відповідних юкавівських констант (4.83): $m_x = Y^x v / \sqrt{2}$. Результат представлений в Табл. 5. Як бачимо, значення констант Юкави лежать у досить широкому діапазоні від 10^{-6} до 1, що безпосередньо пов'язано з широким діапазоном мас частинок матерії. Справді вражаючим є близьке до одиниці значення константи Юкави для t -кварка. Цей факт не знаходить свого пояснення в СМ. Можливо за цим стоїть нова фізика!

Лептони, Y^l	Верхні кварки, Y^{u_n}	Нижні кварки, Y^{d_n}
$Y^e = 2.94 \cdot 10^{-6}$	$Y^u = 1.38 \cdot 10^{-5}$	$Y^d = 2.76 \cdot 10^{-5}$
$Y^\mu = 6.1 \cdot 10^{-4}$	$Y^c = 7.3 \cdot 10^{-3}$	$Y^s = 5.5 \cdot 10^{-4}$
$Y^\tau = 0.01$	$Y^t \approx 1$	$Y^b = 0.024$

Табл. 5: Значення констант Юкави Y для частинок матерії.

Розглянемо тепер параметри, що входять до лагранжіану поля Хіггса (4.103). Перш за все відзначимо, що бозон Хіггса був останньою частинкою СМ, див. Рис. 11, що була експериментально зареєстрована (2012 рік, Великий Адронний Колайдер). Її маса виявилася $m_h \simeq 125.7$ GeV. Тоді значення сталої, що визначає самодію поля Хіггса $\lambda = m_h^2/(2v^2) \simeq 0.13$.

Перейдемо тепер до сталих зв'язку. Замість електричного заряду електрона ($e = g \sin \theta_W$) прийнято використовувати безрозмірну комбінацію (*стала тонкої структури*)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 7.2973525664(17) \cdot 10^{-3} \simeq \frac{1}{137}. \quad (4.192)$$

Зокрема у безрозмірних одиницях заряд електрона

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} = 0.30282212. \quad (4.193)$$

Врахування радіаційних поправок до електромагнітної взаємодії частинок призводить до залежності сталої тонкої структури від квадрату переданого 4-імпульсу взаємодіючих частинок Q^2 (масштаб енергії взаємодії). При збільшенні енергій взаємодіючих частинок стала тонкої структури зростає, що робить досить умовним використання слова "стала"! Зокрема на масштабі енергій порядку маси Z -бозона: $\alpha(Q = M_Z) \simeq 1/128 = 7.87 \cdot 10^{-3}$.

Замість заряду сильної взаємодії (g_s) прийнято використовувати безрозмірну комбінацію (*стала сильної взаємодії*)

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}. \quad (4.194)$$

Існує три відмінності у поведінці сталої сильної взаємодії у порівнянні зі сталою тонкої структури, див. Рис. 12. По-перше, при зростанні масштабу енергій стала α_s спадає, а α зростає! По-друге, зміна значення сталої α_s є набагато більшою ніж зміна α . По-третє, стала тонкої структури виходить на сталі значення (4.192) при малих енергіях взаємодіючих частинок, а значення сталої сильної взаємодії суттєво залежить від масштабу енергій частинок навіть у низькоенергетичному випадку.

Стала сильної взаємодії набуває значення більшого за одиницю при масштабі енергій менших 200 MeV, або на відстанях більших за радіус протона. Завдяки цьому існує явище *конфайнменту*, коли

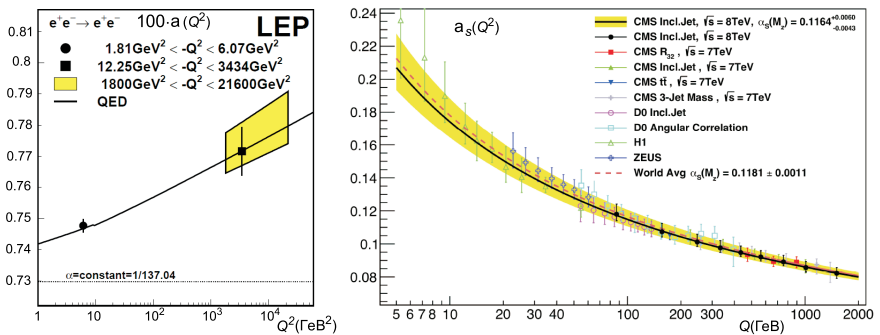


Рис. 12: Залежність значень сталої тонкої структури $100 \cdot \alpha$ (експериментальне підтвердження отримано на Великому електрон-позитронному колайдері LEP, див. [86]) та сталої сильної взаємодії α_s [87] від масштабу енергій взаємодіючих частинок.

кварки не можуть віддалитися один від одного на відстані більші за радіус протона (~ 1 фм) за рахунок величезного зростання взаємодії між ними. З іншого боку, зменшення α_s при великих масштабах енергій взаємодіючих частинок означає, що на відстанях менших за радіус протона кварки взаємодіють слабо. Це явище отримало назву *асимптотичної свободи*.

Виникає питання, яка природа явища зміни сталих зв'язку від масштабу енергій і чому існує така відмінність у поведінці сталої тонкої структури та сталої сильної взаємодії? Виявилось, що зміну сталої тонкої структури (зміну значення заряду) якісно можна пояснити явищем екранування електричного заряду. На дуже близьких відстанях від електрона, за рахунок величезних значень електромагнітних полів, утворюються пари частинок-античастинок (електрон-позитронні, мюон-антимюонні пари тощо), які екранують заряд електрона. Чим більші енергії взаємодіючих частинок, тим ближче частинки підходять одна до іншої, що робить слабшим ефект екранування і призводить до зростання сталої тонкої структури, див. Рис. 13.

Явище спадання значення сталої сильної взаємодії пояснюється тим, що на відміну від фотонів, які взаємодіють лише з електрично зарядженими частинками, глюони взаємодіють як з кварками, так і з

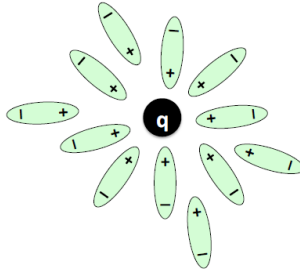


Рис. 13: Екранування заряду електрона у середовищі пар частинка-античастинка

іншими глюонами. В результаті діаграми, що визначають зміну сталої сильної взаємодії мають вигляд, що представлений на Рис. 14. Справа у тому, що перші дві діаграми на Рис. 14 (представляють окремі діаграми глюон-кваркової взаємодії) мають вигляд такий самий як і діаграми, що описують зміну електричного заряду¹. Якщо врахувати лише їх, ми б отримали зростання сталої сильної взаємодії при збільшенні масштабу енергій взаємодіючих частинок і ефект екранування заряду (такий самий і як для електричного заряду). Однак, дві останні діаграми (представляють окремі діаграми глюон-глюонної взаємодії) дають більш вагомий внесок, що і призводять до спадання сталої сильної взаємодії при збільшенні масштабу енергій і так-званого ефекту антиекранування заряду сильної взаємодії.

Перейдемо тепер до розгляду *сталой слабкої взаємодії*, яка визначається стандартним чином

$$\alpha_W = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (4.195)$$

Дана стала пов'язана з реакціями, що проходять через $W^\pm$ -бозони, тому заряд g іноді позначають як g_W . Заряд, що входить у взаємодії обумовлені Z -бозонами, часто позначають як $g_Z = g_W / \cos \theta_W$, див. (4.106).

Може виникнути питання "Чим принципово відрізняється стала тонкої структури від сталої слабкої взаємодії, якщо одна визначається через сталу $e = g \sin \theta_W$, а інша просто через сталу g "?

¹ Діаграми, що дають головний внесок у зміну сталої тонкої структури містять ферміонні петлі, тобто містять лептони та кварки.

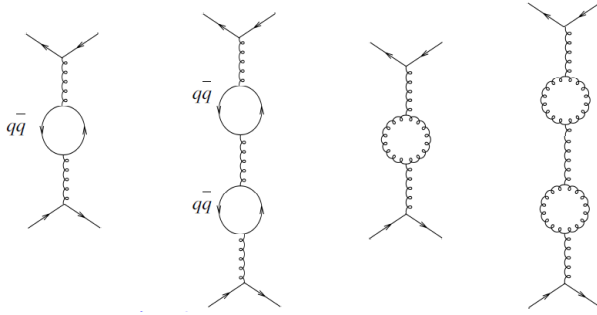


Рис. 14: Діаграми, що дають внесок у зміну сталої сильної взаємодії.

З фізичної точки зору дані стали описують різні взаємодії. Стала тонкої структури визначає взаємодію електрично заряджених частинок обумовлену фотонами. Радіаційні поправки до сталої тонкої структури (залежність від масштабу енергій) визначаються петльовими діаграми до лінії фотонного пропагатора. Стала слабкої взаємодії визначає взаємодію частинок обумовлену масивними $W^\pm$, Z -бозонами. Радіаційні поправки до сталої слабкої взаємодії визначаються петльовими діаграми до ліній $W^\pm$ -бозонів. Діаграми, що дають внесок у зміну сталої слабкої взаємодії містять як ферміонні петлі так і петлі, що містять $W^\pm$, Z -бозони, див. (4.106). Внаслідок цього стала слабкої взаємодії буде спадати зі збільшенням масштабу енергій взаємодіючих частинок (так само як і для сталої сильної взаємодії) починаючи з деякого масштабу енергій.

З математичної ж точки зору, лагранжіан СМ, що описує $U_Y(1) \times SU_W(2)$ симетрію, містить дві сталі – g (для групи $U_Y(1)$) та g' (для групи $U_W(2)$). Після спонтанного порушення симетрії виникає електромагнітна (зі сталою взаємодії $e = g \sin \theta_W$) та слабка взаємодія (зі сталою g). Фактично, замість двох початкових параметрів g та g' ми перейшли до інших двох незалежних параметрів g та $\sin \theta_W$.

Існують певні складнощі [88] з безпосереднім визначенням $\sin^2 \theta_W$ з начебто очевидного співвідношення, див. (4.63),

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}. \quad (4.196)$$

Ці складнощі пов'язані з необхідністю урахування радіаційних поправок.

На даний час експериментальним способом визначення $\sin^2 \theta_W$ є дослідження асиметрії народження пар лівих та правих лептонів при електрон-позитронній анігіляції на резонансній енергії народження Z -бозону [88]:

$$A_{LR} = \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R}, \quad (4.197)$$

де $\sigma_{L(R)}$ – переріз народження пар лептонів з лівою (правою) кіральністю. В цьому випадку будуть домінувати ефекти народження частинок внаслідок розпаду Z -бозону. Якщо взаємодію лептонів з Z -бозонами (4.106) представити у вигляді

$$\mathcal{L}_{f,Z}^{int} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [g_V - g_A \gamma^5] f Z_\mu, \quad (4.198)$$

де

$$g_V = t_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W, \quad g_A = t_3^f, \quad (4.199)$$

то

$$A_{LR} = \frac{2g_V g_A}{g_V^2 + g_A^2} = \frac{2[1 + 4q_f \sin^2 \theta_W^{eff}]}{1 + [1 + 4q_f \sin^2 \theta_W^{eff}]^2}, \quad (4.200)$$

де θ_W^{eff} – ефективний кут Вайнберга, оскільки в даній реакції враховуються різноманітні радіаційні поправки в тому числі до лінії Z -бозону та вершини взаємодії $\gamma - Z$.

Теоретичні передбачення величини $\sin^2 \theta_W$ представлені на Рис.15, див. [88, 89]. Як бачимо, поки бракує експериментальних даних для повної перевірки наведеної залежності. З іншого боку, використавши експериментальні дані мас $W^\pm$ - Z -бозонів ($M_W \approx 80.39$ GeV та $M_Z \approx 91.19$ GeV) та співвідношення (4.196), легко отримати, що

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \approx 0.223. \quad (4.201)$$

Як бачимо, отримане значення не зовсім узгоджується зі значенням з Рис. 15, згідно якого на довільному масштабі енергій $\sin^2 \theta_W > 0.23$.

Стала слабкої взаємодії пов'язана зі сталою тонкої структури співвідношенням

$$\alpha_W = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W}, \quad (4.202)$$

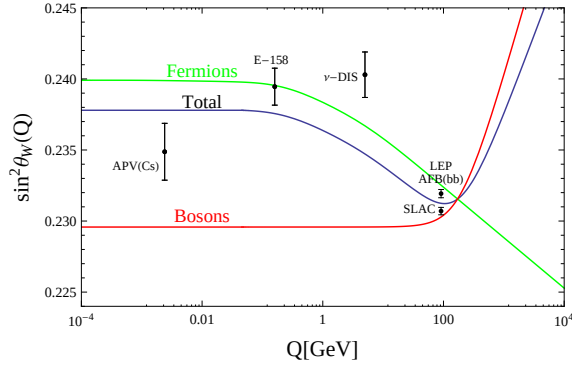


Рис. 15: Теоретичні передбачення залежності величини $\sin^2 \theta_W$ від масштабу енергій частинок та наявні експериментальні дані. Рис. взято з [88]. Червоні та зелені лінії демонструють внески ферміонних та бозонних радіаційних поправок.

Використавши значення сталої тонкої структури з Рис. 12 та величини $\sin^2 \theta_W$ з Рис. 15, побудуємо залежність сталої слабкої взаємодії від масштабу енергій взаємодіючих частинок, див. Рис. 16. Як бачимо, на наведеному масштабі енергій стала слабкої взаємодії є зростаючою функцією. Зі збільшенням масштабу енергій, зростання заміниться спаданням функції, див. Розділ 6.2. Корисно також представити поведінку значень двох інших сталих зв'язку, див. Рис. 16.

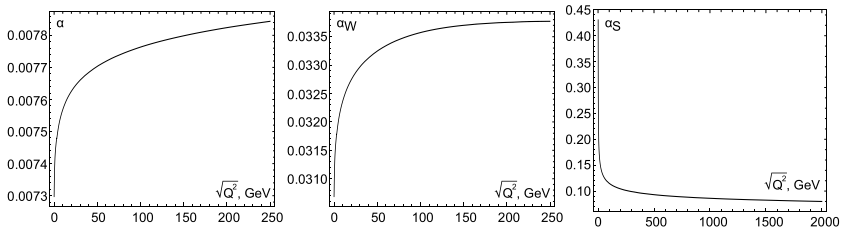


Рис. 16: Поведінка сталих зв'язку зі зростанням масштабу енергій взаємодіючих частинок: а) – стала тонкої структури, б) – стала слабкої взаємодії, в) – стала сильної взаємодії (починаючи з масштабу 1 GeV).

4.11 Лагранжіан СМ в довільному калібруванні

В попередніх розділах був розглянутий лагранжіан СМ у випадку унітарного калібрування поля Хіггса (4.34). Зазначений формалізм є зручним для розрахунків процесів у першому незникаючому наближенні, оскільки не містить внеску нефізичних голдстоунівських бозонів бозона Хіггса. Однак при урахуванні радіаційних (петльових) поправок унітарне калібрування втрачає свою привабливість. Справа в тому, що петлі в діаграмній техніці Фейнмана зіставляється інтеграл за 4-імпульсом від добутку відповідних пропагаторів полів [67]. Пропагатори масивних калібрувальних полів в унітарному калібруванні перетворюються у сталі величини при нескінченних значеннях 4-імпульсу, що може призвести до складнощів, пов'язаних з розбіжним значенням результату інтегрування. Виявляється, що в неунітарних калібруваннях пропагатори калібрувальних полів при нескінченних значеннях 4-імпульсу (k) спадають як $\sim k^{-2}$. Зазначена поведінка забезпечує збіжність інтегралів у петлі, але платою за це є необхідність врахування внесків нефізичних голдстоунівських бозонів [68]. Звичайно ж фізичний результат не має залежати від вибору калібрування.

В неунітарному калібруванні дублет поля Хіггса (4.33) набуває загального вигляду у формі [90]

$$H = \left(\frac{\phi^+}{v + h + i\phi_z} \right). \quad (4.203)$$

Оскільки гіперзаряд поля Хіггса $Y = 1$, див. Табл. 1, то з (4.19) випливає, що поле у верхній частині ізотопічного дублету поля Хіггса (ϕ^+) має електричний заряд $+1$ (в одиницях заряду електрона за модулем) і, відповідно, є комплексним $(\phi^+)^* = \phi^-$; а поле у нижній частині дублету (ϕ_z) є електрично нейтральним і дійсним.

Тепер стає зрозумілим, чому вакуумне середнє поля Хіггса обирається саме у вигляді

$$H_0 = \left(\frac{0}{\sqrt{2}} \right), \quad (4.204)$$

де нижня (незаряджена) компонента поля є ненульовою. Аби верхня компонента поля $< \phi^+ >$ також була ненульовою, це б означало, що вакуум поля Хіггса є електрично зарядженим, що явно порушувало б $U_{EM}(1)$ інваріантність теорії

після спонтанного порушення симетрії. Як побачимо далі, ненульове значення $\langle \phi^+ \rangle$ генерувало б також ненульову масу фотона. Справа в тому, що вираз (4.211) містить взаємодію типу $e^2 \phi^+ \phi^- A_\mu A^\mu$. Звичайно, треба відзначити, що в загальній теорії спонтанного порушення симетрії групи $SU(2)$, див. Розділ (3.4), поле може набутися мінімального значення енергії в будь-якій точці на гіперсфері $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = \phi_0^2$. Тобто може статися, що

$$H'_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (4.205)$$

В цьому випадку потрібно використати інваріантність теорії відносно перетворень за групою $SU(2)$ і звести вакуумне середнє у формі H'_0 до вигляду H_0 (4.204).

В Розділі 4.3 ми одразу використовували явний вигляд ізотопічного дублету поля Хіггса в унітарному представленні та явний вигляд матриць Паулі. Цього разу ми використаємо інший формалізм, у якому явний вигляд матриць використаємо лише в кінці розрахунків. Для цього запишемо подовжену похідну, що діє на поле Хіггса, у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu H &= / (4.45) / = \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{V}_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) H = / (4.56) / = \\ &= \left[\partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) - i \frac{g}{2} \tau_3 W_\mu^3 - i \frac{g'}{2} B_\mu \right] H = / (4.54), (4.59) / = \\ &= \left[\partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) - ieQ A_\mu - i \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{\tau_3}{2} - Q \sin^2 \theta_W \right) Z_\mu \right] H, \end{aligned} \quad (4.206)$$

де матриця Q для поля Хіггса знаходиться з формули Гелл-Манна-Нішіджими (4.19) для значення гіперзаряду $Y = 1$:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.207)$$

а матриці $\tau^\pm$ визначаються як

$$\tau^\pm = \frac{\tau_1 \pm i \tau_2}{2}. \quad (4.208)$$

Використавши вираз (4.206), можна записати кінетичні доданки $(\mathcal{D}_\mu H)^\dagger \mathcal{D}^\mu H$ як

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\mu H)^+ \mathcal{D}^\mu H &= (\partial^\mu H)^+ \partial_\mu H - \frac{ig}{\sqrt{2}} \partial^\mu H^+ [(\tau^+ H) W_\mu^+ + (\tau^- H) W_\mu^-] + \\
&+ \frac{ig}{\sqrt{2}} [(H^+ \tau^+) W_\mu^+ + (H^+ \tau^-) W_\mu^-] \partial^\mu H - \\
&- \frac{ig}{\cos \theta_W} \partial^\mu H^+ \left[\frac{\tau_3}{2} - Q \sin^2 \theta_W \right] H Z_\mu + \\
&+ \frac{ig}{\cos \theta_W} H^+ \left[\frac{\tau_3}{2} - Q \sin^2 \theta_W \right] \partial^\mu H Z_\mu - \\
&- ie \partial^\mu H^+ Q H A_\mu + ie H^+ Q \partial^\mu H A_\mu + \\
&+ \frac{g^2}{2} [H^+ H W^{-,\mu} W_\mu^+ + H^+ Q H \{W^{+,\mu} W_\mu^- - W^{-,\mu} W_\mu^+\}] + \\
&+ \frac{eg}{\sqrt{2}} H^+ [\tau^- W^{-,\mu} + \tau^+ W^{+,\mu}] H A_\mu - \\
&- \frac{eg'}{\sqrt{2}} H^+ [\tau^- W^{-,\mu} + \tau^+ W^{+,\mu}] H Z_\mu + \\
&+ 2e^2 \cot 2\theta_W H^+ Q H A_\mu Z^\mu + e^2 H^+ Q H A_\mu A^\mu + \\
&+ \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} H^+ (1 - Q \sin^2 2\theta_W) H Z_\mu Z^\mu, \quad (4.209)
\end{aligned}$$

де для знаходження $(\mathcal{D}_\mu H)^+$ ми використали відому властивість $(AB)^+ = B^+ A^+$.

В якості перевірки підставимо в отриманий вираз поле Хіггса в унітарному калібруванні (4.34). Отримаємо компактний вираз, що узгоджується з раніше отриманим виразом в унітарному калібруванні:

$$\begin{aligned}
(D^\mu H)^+ D_\mu H &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{g^2}{4} (v + h)^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \\
&+ \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} (v + h)^2 Z_\mu Z^\mu. \quad (4.210)
\end{aligned}$$

Звертаємо увагу, що в такому формалізмі ми автоматично отримали відсутність маси у електромагнітного поля та маси $W^\pm$ -, Z -бозонів згідно з (4.63).

Використавши загальний вираз для поля Хіггса (4.203), можна отримати

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\mu \Phi)^+ \mathcal{D}^\mu \Phi = & \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_z \partial^\mu \phi_z + \partial_\mu \phi^- \partial^\mu \phi^+ + \\
& + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 + \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 + \\
& + \left(\frac{g^2}{2} W^{-,\mu} W_\mu^+ + \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z^\mu Z_\mu \right) \frac{\phi_z^2}{2} - \\
& - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \left[\partial_\mu h \phi_z - h \partial_\mu \phi_z - \boxed{v \partial_\mu \phi_z} \right] Z^\mu - \\
& - i e (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) (\cot 2\theta_W Z^\mu + A^\mu) + \\
& + \phi^- \phi^+ \left(\frac{g^2}{2} W^{+,\mu} W_\mu^- + e^2 (\cot 2\theta_W Z^\mu + A^\mu) (\cot 2\theta_W Z_\mu + A_\mu) \right) + \\
& + i \frac{g}{2} \left[h (W^{-,\mu} \partial_\mu \phi^+ - W^{+,\mu} \partial_\mu \phi^-) + \boxed{v (W^{-,\mu} \partial_\mu \phi^+ - W^{+,\mu} \partial_\mu \phi^-)} - \right. \\
& \quad \left. - \partial_\mu h (W^{-,\mu} \phi^+ - W^{+,\mu} \phi^-) \right] + \\
& + \frac{g}{2} \left[\phi_z (W^{-,\mu} \partial_\mu \phi^+ + W^{+,\mu} \partial_\mu \phi^-) - \partial_\mu \phi_z (W^{-,\mu} \phi^+ + W^{+,\mu} \phi^-) \right] + \\
& + \frac{e}{2} (h + v) [W^{-,\mu} \phi^+ + W^{+,\mu} \phi^-] (g A_\mu - g' Z_\mu) - \\
& - i \frac{e}{2} \phi_z [W^{-,\mu} \phi^+ - W^{+,\mu} \phi^-] (g A_\mu - g' Z_\mu). \quad (4.211)
\end{aligned}$$

Як бачимо, даний вираз містить 3- та 4-частинкові взаємодії голдстоунівських бозонів ($\phi^\pm, \phi_z$) з калібрувальними полями СМ. Але є два доданки (виділені прямокутниками), що описують двочастинкові взаємодії. З ними є наступна проблема. По-перше, така взаємодія не може бути між реальними частинками внаслідок порушення законів збереження енергії-імпульсу¹. Відповідно, зазначена взаємодія може відбутися, коли принаймі одна з частинок є віртуальною. По-друге, дана взаємодія дає внесок до пропагаторів Z та W -бозонів та ускладнює їх визначення, оскільки у внутрішню лінію відповідної діаграми можна зробити вставку у вигляді лінії відповідного голдстоунівського бозона. Як вирішується дана проблема буде показано пізніше.

¹Дана взаємодія передбачала б перетворення однієї масивної частинки в частинку з іншою масою, але це порушує закони збереження.

Відзначимо, що в неунітарному калібруванні свій вигляд також змінить потенціал поля Хігса (4.64):

$$\begin{aligned}
 V(H) &= \lambda \left(H^+ H - \frac{v^2}{2} \right)^2 = \lambda \left(\phi^- \phi^+ + \frac{(h+v)^2 + \phi_z^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^2 = \\
 &= \frac{m_h^2}{2} h^2 + \lambda v h^3 + \lambda \left[\frac{h^4}{4} + \frac{\phi_z^4}{4} + (\phi^- \phi^+)^2 \right] + \\
 &\quad + \lambda \phi_z^2 \phi^- \phi^+ + \lambda (2vh + h^2) \left(\frac{\phi_z^2}{2} + \phi^- \phi^+ \right), \quad (4.212)
 \end{aligned}$$

де в останній стрічці показана взаємодія голдстоунівських бозонів між собою та з полем Хігса. Отже тепер за допомогою виразів (4.211) та (4.212) ми можемо узагальнити лагранжіан поля Хігса (4.65) для випадку довільного калібрування.

Поле Хігса входить також до доданку юкавівської взаємодії у СМ (4.11) та модифікує його за рахунок врахування голдстоунівських бозонів. Слід вказати явний вигляд для дублету $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} v + h - i\phi_z \\ \sqrt{2} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (4.213)$$

Підставивши вирази (4.203) та (4.213) у (4.11) та перейшовши до масового базису ферміонних полів можна отримати

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{Yukawa} &= - \sum_f m^f \bar{f} f \left(1 + \frac{h}{v} \right) - \\
 &\quad - \sqrt{2} \frac{m_n^e}{v} [\bar{\nu}_{Ln} e_{Rn} \phi^+ + \bar{e}_{Rn} \nu_{Ln} \phi^-] - i \frac{m_n^e}{v} [\bar{e}_{Ln} e_{Rn} - \bar{e}_{Rn} e_{Ln}] \phi_z \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{v} [\bar{u}_L V M_{diag}^d d_R \phi^+ + \bar{d}_R M_{diag}^d V^+ u_L \phi^-] + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{v} [\bar{u}_R M_{diag}^u V d_L \phi^+ + \bar{d}_L V^+ M_{diag}^u u_R \phi^-] - \\
 &\quad - i \frac{m_n^d}{v} [\bar{d}_{Ln} d_{Rn} - \bar{d}_{Rn} d_{Ln}] \phi_z + i \frac{m_n^u}{v} [\bar{u}_{Ln} u_{Rn} - \bar{u}_{Rn} u_{Ln}] \phi_z, \quad (4.214)
 \end{aligned}$$

де за індексом f відбувається підсумовування за всіма ферміонами СМ, також підсумовування здійснюється за поколіннями $n = 1, 2, 3$;

V матриця ККМ, M_{diag}^i – діагональна масова матриця для верхніх та нижніх кварків ($i = u, d$ відповідно).

Звертаємо увагу, що після спонтанного порушення симетрії поля Хігса, симетрія вакууму СМ змінюється: $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1) \rightarrow SU_C(3) \times U_{EM}(1)$, див. (4.41). Унітарне калібрування дозволяє відкинути голдстоунівські бозони електрослабкої взаємодії, а накладання унітарного калібрування призводить до того, що лагранжіан СМ набуває симетрії відносно групи $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$. Це означатиме, що в унітарному калібруванні поля $W^\pm$ та Z бозонів зафіксовані¹, а калібрування електромагнітного поля та поля глюонів може бути довільним, наприклад, у формі (4.215) – (4.217).

Якщо ж вигляд збурень для дублету поля Хігса обрати в загальному вигляді (4.203), то хоча вакуум СМ буде інваріантним відносно $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$ перетворень, лагранжіан СМ залишиться інваріантним відносно $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ перетворень.

Для того, щоб зафіксувати один з можливих варіантів калібрування в лагранжіан штучно додається доданок, що явно порушує калібрувальну інваріантність². Даний доданок може мати довільний вигляд. В теоріях зі спонтанним порушенням симетрії прийнято обирати такі додаткові доданки у вигляді [68, 90]

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{2\xi_G} F_G^2 - \frac{1}{2\xi_A} F_A^2 - \frac{1}{2\xi_Z} F_Z^2 - \frac{1}{2\xi_W} F_- F_+, \quad (4.215)$$

де

$$F_G = \partial^\mu G_\mu^a, \quad (4.216)$$

$$F_A = \partial^\mu A_\mu, \quad (4.217)$$

$$F_Z = \partial^\mu Z_\mu - \xi_Z m_Z \phi_Z, \quad (4.218)$$

$$F_+ = \partial^\mu W_\mu^+ - i\xi_W m_W \phi^+, \quad (4.219)$$

$$F_- = \partial^\mu W_\mu^- + i\xi_W m_W \phi^-. \quad (4.220)$$

Тут ξ_i – позитивні параметри, що фіксують калібрування для кожного з калібрувальних полів СМ. Дещо скорочений вигляд F_G та F_A

¹З лагранжіанів вільних масивних полів $W^\pm$ та Z бозонів (лагранжіани Прока) випливають умови Лоренца для цих полів: $\partial^\mu W_\mu^\pm = \partial^\mu Z_\mu = 0$.

²Тут можна провести аналогію з формалізмом множників Лагранжана в математичному аналізі для пошуку екстремуму функції декількох змінних з додатковою умовою. Див. також лагранжіан Штюкельберга [67, 69].

пов'язаний з безмасовістю глюонного та електромагнітного полів. Подовження виразу F_i для масивних полів пов'язано з тим, що квадрати відповідних величин

$$-\frac{1}{2\xi_Z}F_Z^2 = -\frac{1}{2\xi_Z}\partial^\mu Z_\mu\partial^\nu Z_\nu - \frac{\xi_Z m_Z^2}{2}\phi_Z^2 + \boxed{m_Z\partial^\mu Z_\mu\phi_Z}, \quad (4.221)$$

$$-\frac{1}{2\xi_W}F_{-}F_{+} = -\frac{1}{2\xi_W}\partial^\mu W_\mu^+\partial^\nu W_\nu^- - \frac{\xi_W m_W^2}{2}\phi^+\phi^- - \boxed{-\frac{i}{2}m_W\partial^\mu W_\mu^+\phi^- + \frac{i}{2}m_W\partial^\mu W_\mu^-\phi^+} \quad (4.222)$$

містять доданки (виділені прямокутниками), що в сумі з проблемними (виділеними прямокутниками) доданками виразу (4.211) утворюють повні похідні і можуть бути виключені з розгляду! З даного виразу також випливає, що голдстоунівські поля ϕ_z та $\phi^\pm$ штучним чином набувають маси¹ $m_{\phi^\pm} = \sqrt{\frac{\xi_W}{2}}m_W$ та $m_{\phi_z} = \sqrt{\xi_Z}m_Z$. Сам факт того, що зазначені маси залежать від калібрувального параметра ξ_i вказує на їх нефізичність.

Потрібно відмітити, що після накладання умов, що фіксують калібрування полів $W^\pm$ та Z бозонів, лагранжіан СМ в неунітарному калібруванні залишається інваріантним відносно перетворень $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$, як і лагранжіан унітарного калібрування. Лише після фіксації калібрування всіх інших векторних полів (фотонного та глюонного полів) лагранжіан СМ стає заданим повністю однозначно.

¹Звідси й випливає вимога додатності параметра ξ_i .

4.12 Духові поля в лагранжіані СМ

Для розуміння даного розділу нам знадобляться базові знання з діаграмної техніки Фейнмана, див., наприклад, [67]. Даний підрозділ буде базуватися на матеріалі підручника [68].

Як відомо, див., наприклад, [68, 70], безмасові векторні поля з чотирьох своїх компонент мають лише дві незалежні компоненти, або ступені вільності. Цим ступеням вільності відповідає повздожність вектора спіну векторної частинки до напрямку її руху. Проекція спіну частинки на напрямок руху може бути плюс, або мінус 1. Нульової проекції спіну на напрямоу руху безмасової векторної частинки не існує.

Напрямок вектора спіну визначається поляризацією векторного поля, або поляризаційним 4-вектором ε . Позначатимемо фізичні поляризаційні вектори як $\varepsilon_{i\mu}^T$ ($i = 1, 2$), що відповідатимуть додатній та від'ємній проекції спіну відповідно (*transverse* – поперечний). Дані поляризаційні вектори є поперечними до 4-імпульса векторної частинки, тобто

$$(\varepsilon_i^T k) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.223)$$

див., наприклад, [56]. Отже, безмасове векторне поле можна представити як певну суперпозицію лише двох поперечних 4-векторів поляризації. При цьому загальний вираз для довільного 4-вектора можна задати через лінійну комбінацію чотирьох взаємно перпендикулярних векторів: двох поперечних $\varepsilon_{i\mu}^T$ ($i = 1, 2$) та двох повздожних $\varepsilon_{i\mu}^L$ ($i = 1, 2$, що відповідає паралельному та антипаралельному вектору поляризації до вектора 4-імпульсу, *longitudinal* – повздожній).

В теорії абелевого векторного поля, наприклад у квантовій електродинаміці (КЕД), існує тотожність Уорда [68], завдяки якій амплітуда процесу народження двох векторних безмасових частинок (з 4-імпульсами k_1 та k_2 відповідно) $M_{fi} = M^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2)$ має властивість

$$M^{\mu\nu} k_1^\mu = M^{\mu\nu} k_2^\nu = M^{\mu\nu} k_1^\mu k_2^\nu = 0. \quad (4.224)$$

Тобто тензор $M^{\mu\nu}$ є поперечним до 4-імпульсів утворених векторних частинок. Це означає, що автоматично має виконуватися умова

$$M^{\mu\nu} \varepsilon_{i\mu}^{L*}(k_1) = M^{\mu\nu} \varepsilon_{i\nu}^{L*}(k_2) = M^{\mu\nu} \varepsilon_{i\mu}^{L*}(k_1) \varepsilon_{i\nu}^{L*}(k_2) = 0. \quad (4.225)$$

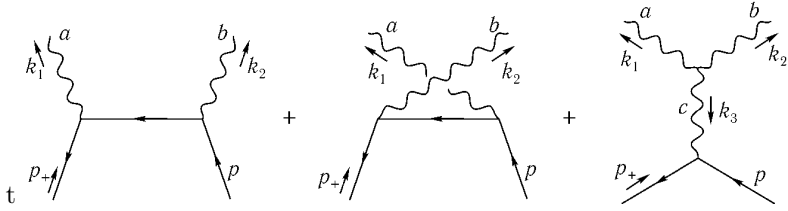


Рис. 17: Діаграми, що дають внесок в амплітуду анігіляції ферміона й антиферміона в два калібрувальних бозони

Отже, якщо ви захочете порахувати, наприклад, переріз реакції анігіляції електрон-позитронної пари в два фотони з нефізичною повздожньою поляризацією, то отримаєте фізично очікуваний результат, а саме нуль.

Давайте розглянемо тепер, з якою поляризацією народжуватимуться векторні частинки у неабелевій теорії поля на прикладі процесу анігіляції ферміон-антиферміонної пари. Даний процес буде описуватися трьома діаграмами, що зображені на Рис. 17. Звертаємо увагу, що перші дві діаграми є аналогічними до діаграм КЕД, а третя діаграма має місце лише в неабелевих теоріях калібрувальних полів та містить вершину з трьома лініями векторних частинок. Амплітуда анігіляції для перших двох діаграм дорівнює

$$i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu}^*(k_1)\varepsilon_{\nu}^*(k_2) = (ig)^2\bar{v}(p_+)\left\{\gamma^{\mu}T^a\frac{i}{\not{p}-\not{k}_2-m}\gamma^{\nu}T^b + \gamma^{\nu}T^b\frac{i}{\not{k}_2-\not{p}_+-m}\gamma^{\mu}T^a\right\}u(p)\varepsilon_{\mu}^*(k_1)\varepsilon_{\nu}^*(k_2), \quad (4.226)$$

де T^i – генератори відповідної групи, m – маса ферміона.

Перевіримо виконання тотожності Уорда (4.224) та замінімо один з векторів поляризації на 4-імпульс відповідної частинки:

$$i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu}\varepsilon_{1\mu}^*k_{2\nu} = (ig)^2\bar{v}(p_+)\left\{\gamma^{\mu}T^a\frac{i}{\not{p}-\not{k}_2-m}\not{k}_2T^b + \not{k}_2T^b\frac{i}{\not{k}_2-\not{p}_+-m}\gamma^{\mu}T^a\right\}u(p)\varepsilon_{1\mu}^*. \quad (4.227)$$

Отриманий вираз можна суттєво спростити, якщо врахувати рівняння Дірака для ферміонів:

$$(\not{p} - m)u(p) = 0; \quad \bar{v}(p_+)(-\not{p}_+ - m) = 0. \quad (4.228)$$

Отже до $\not{k}_2$ в чисельнику можна додати $(\not{p} - m)$ або $(-\not{p}_+ - m)$, відповідно. В результаті отримаємо простий вираз для перших двох діаграм реакції анігіляції:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu}\varepsilon_{1\mu}^*k_{2\nu} &= (ig)^2\bar{v}(p_+)\{-i\gamma^\mu[T^a, T^b]_-\}u(p)\varepsilon_{1\mu}^* = \\ &= -g^2\bar{v}(p_+)\gamma^\mu f^{abc}T^cu(p)\varepsilon_{1\mu}^*. \end{aligned} \quad (4.229)$$

Звертаємо увагу, що у випадку лагранжіану з симетрією $U(1)$, наприклад, лагранжіану КЕД, генератори групи дорівнюватимуть одиниці, їх комутатор дорівнюватиме нулю. Отже, при анігіляції ферміонів у безмасові калібрувальні поля групи $U(1)$ ми автоматично доводимо виконання тотожності Уорда.

В неабелевому випадку до виразу (4.229) слід ще додати внесок від третьої діаграми з Рис. 17. Вираз для неї легко отримати скориставшись правилами діаграмної теніки Фейнмана для неабелевих теорій, див. [68, 90]. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_3^{\mu\nu}\varepsilon_{1\mu}^*\varepsilon_{2\nu}^* &= ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho T^cu(p)\frac{-i}{k_3^2}\varepsilon_\mu^*(k_1)\varepsilon_\nu^*(k_2)\times \\ &\times gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k_2 - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)^\nu]. \end{aligned} \quad (4.230)$$

Замінемо вектор поляризації ε_2^* на k_2 та проведемо згортку:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu^*(k_2)[g^{\mu\nu}(k_2 - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)^\nu] &\rightarrow \\ \rightarrow k_2^\mu(k_2 - k_1)^\rho + k_2^\rho(k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3) \cdot k_2 &= \\ = /k_2 = -k_1 - k_3/ = g^{\rho\mu}k_3^2 - k_3^\rho k_3^\mu - g^{\rho\mu}k_1^2 + k_1^\rho k_1^\mu. \end{aligned} \quad (4.231)$$

Оскільки в процесі анігіляції народжуються реальні векторні частинки, то $k_1^2 = 0$ і передостанній доданок в отриманому виразі можна відкинути. Так само можна відкинути доданок $\sim \gamma_\rho k_3^\rho k_3^\mu$. Справді, домноживи ліворуч перший вираз (4.228) на $\bar{v}(p_+)$, а другий – праворуч на $u(p)$, та додавши їх, отримаємо

$$\bar{v}(p_+)(\not{p} + \not{p}_+)u(p) = \bar{v}(p_+)\not{k}_3u(p) = 0.$$

Отже, для третьої діаграми матимемо

$$i\mathcal{M}_3^{\mu\nu}\varepsilon_{1\mu}^*k_{2\nu} = g^2\bar{v}(p_+)\gamma^\mu u(p)\varepsilon_{1\mu}^* \cdot f^{abc}T^c + \\ + g^2\bar{v}(p_+)\frac{k_1}{k_3^2}u(p)f^{abc}T^c(\varepsilon_1^* \cdot k_1). \quad (4.232)$$

Остаточно, для всіх діаграм анігіляції ферміон-антиферміонної пари у другому порядку за теорією збурень матимемо

$$i(\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu} + \mathcal{M}_3^{\mu\nu})\varepsilon_{1\mu}^*k_{2\nu} = g^2\bar{v}(p_+)\frac{k_1}{k_3^2}u(p)f^{abc}T^c(\varepsilon_1^* \cdot k_1). \quad (4.233)$$

Ми отримали результат, що пропорційний $f^{abc}(\varepsilon_1^* \cdot k_1)$. Тобто для абелевих полів, де $f^{abc} = 0$, тотожність Уорда виконується. Для неабелевих полів у випадку фізичних (поперечних) поляризацій утворених векторних бозонів зазначений скалярний добуток дорівнюватиме нулю і тотожність Уорда виконуватиметься також, але для нефізичних (поперечних) поляризацій зазначений скалярний добуток не дорівнюватиме нулю. Отже, ми бачимо, що існує ненульовий переріз реакції анігіляції певної пари частинки та античастинки в два векторних бозони з нефізичною повздожною поляризацією. Ми отримали нефізичний результат!

Звичайно можна сказати слова про те, що реакції з утворенням векторних частинок з нефізичною поляризацією не має існувати і таку реакцію не потрібно рахувати взагалі. Але такий підхід не зможе в повній мірі вирішити проблему з векторними частинками з нефізичною поляризацією. Ця проблема проявить себе на петльовому рівні. Справа в тому, що при розрахунку петлі з двох віртуальних векторних бозонів буде автоматично враховуватися ненульовий внесок від частинок з нефізичними поляризаціями, див. детальніше [68]. А це значить, що розрахунок радіаційних поправок до фізичних процесів буде давати неправильний результат.

Наведене протиріччя зникає під час розгляду вторинного квантування неабелевих калібрувальних полів у формалізмі Фаддєєва-Попова [91–93], що вимагає використання математичного апарату континуального інтегрування [94, 95] та далеко виходить за межі нашого курсу. Результатом квантування неабелевих калібрувальних полів методом Фаддєєва-Попова є введення в лагранжіан додаткового (допомі-

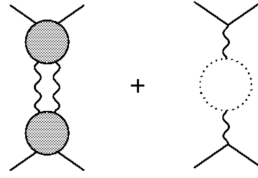


Рис. 18: Ліва діаграма зображає амплітуду ферміон-антиферміонного розсіяння з урахуванням петльової поправки. Сірі кола є сумою трьох внесків діаграм ферміон-антиферміонної анігіляції, що зображені на Рис. 17. Хвилясті лінії – калібрувальні поля. Права діаграма дає петльовий внесок духових полів (пунктирні лінії). При цьому духовий петлі відповідає додатковий множик (-1) , як і для ферміонних петель. Сума лівої та правої діаграми описує процес ферміон-антиферміонного розсіяння, що позбавлений від проблеми внеску нефізичних поляризацій калібрувальних неабелевих полів [68].

жного) поля духових частинок (духові поля), що автоматично знищують внески нефізичних поляризацій калібрувальних неабелевих полів у внутрішніх лініях діаграм Фейнмана, див. Рис. 18. Духове поле є скалярним полем, але оператори духових полів антикомутують. Іншими словами це скалярні частинки, фізичні характеристики яких підкоряються функції розподілу Фермі-Дірака, тобто як для ферміонів. Це не страшно, оскільки духові частинки не є фізичними частинками, вони не можуть бути експериментально зареєстровані, їм не можуть відповідати зовнішні лінії діаграм Фейнмана.

В літературі можна зустріти твердження про те, що духові поля це поля з від’ємними ступенями вільності. Справді, додавання духових полів до лагранжіану калібрувальної теорії знищує внески нефізичних поляризацій калібрувальних неабелевих полів, або знищує відповідні ступені вільності калібрувальних полів.

Не зупиняючись на деталях, наведемо процедуру запису явного вигляду духового лагранжіану для неабелеві теорії. Додатковий внесок у дію духових полів в теорії з неабелевим векторним полем групи $SU(n)$ має наступний вигляд

$$S_{ghost} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \bar{c}^a(x) M_f^{ab}(x, y) c^b(y), \quad (4.234)$$

де c – скалярне духове поле, $\bar{c}$ – позначення для ермітово спряженого поля, a, b – групові індекси групи $SU(n)$.

Припустимо, що ми наклали певну умову $f^a(A_\mu) = 0$, що фіксує калібрування векторного поля. Зробимо тепер нескінченно мале калібрувальне перетворення $A_\mu \rightarrow A_\mu^{(w)}$, де w – параметр перетворення, див. (2.30):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^{(w)} = U(w)A_\mu U^{-1}(w) + U(w)\partial_\mu U^{-1}(w). \quad (4.235)$$

Можна показати, що обравши унітарне перетворення у вигляді $U(w) = e^{-igT^a w^a}$, отримаємо в першому порядку малості

$$\begin{aligned} A_\mu^{(w),a} &= A_\mu^a - \partial_\mu w^a - g f^{abc} A_\mu^b w^c = A_\mu^a - \mathfrak{D}_\mu w^a, \quad \text{тобто} \\ \delta A_\mu^{(w),a} &= -\mathfrak{D}_\mu w^a, \end{aligned} \quad (4.236)$$

де $\mathfrak{D}_\mu$ – подовжена похідна, що діє на функцію приєднаному представленні (2.58).

Саме функціональний розклад функції $f^a(A_\mu^{(w)})$ визначить нам оператор $M^{ab}(x, y)$, а саме

$$\begin{aligned} f^a(A_\mu^{(w)}(x)) &= f^a(A_\mu(x)) + \int \frac{\delta f^a(A_\mu^{(w)}(x))}{\delta w^d(y)} \Big|_{w=0} \delta w^d(y) dy = \\ &= f^a(A_\mu(x)) + \int dy M_f^{ad}(x, y) \delta w^d(y), \end{aligned} \quad (4.237)$$

де $M^{ad}(x, y)$ – оператор, що визначається через функціональну похідну

$$M_f^{ad}(x, y) = \frac{\delta f^a(A_\mu^{(w)}(x))}{\delta w^d(y)} \Big|_{w=0} \quad (4.238)$$

Щоб рухатися далі нам потрібно задати певну умову, що фіксує калібрування. Нехай, для прикладу, це буде умова Лоренца

$$f^a(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu^a = 0. \quad (4.239)$$

Тоді

$$f^a(A_\mu^{(w)}(x)) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - (\partial^\mu \partial_\mu w^a(x) + g f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^b(x) w^c(x))). \quad (4.240)$$

Очевидно, що перший доданок відповідає відповіді першому доданку розкладу (4.237), а другий доданок дозволить нам визначити оператор $M^{ad}(x, y)$.

$$\begin{aligned}
 \int dy M_f^{ad}(x, y) \delta w^d(y) &= -(\partial^\mu \partial_\mu w^a(x) + g f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^b(x) w^c(x))) = \\
 &= - \int dy \delta(x - y) \{ \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} w^a(x) + g f^{abc} \partial^{x,\mu} (A_\mu^b(x) w^c(x)) \} = \\
 &= / \delta(x - y) g(x) = \delta(x - y) g(y) / = \\
 &= - \int dy \delta(x - y) \{ \partial^{y,\mu} \partial_{y,\mu} w^a(y) + g f^{abc} \partial^{y,\mu} (A_\mu^b(y) w^c(y)) \}. \quad (4.241)
 \end{aligned}$$

Інтегруванням за частинами можна отримати такі співвідношення

$$\int dy \delta(x - y) \partial^{y,\mu} \partial_{y,\mu} w^a(y) = \int dy \partial^{y,\mu} w^a(y) \partial_{y,\mu} \delta(x - y), \quad (4.242)$$

$$\int dy \delta(x - y) \partial^{y,\mu} (A_\mu^b(y) w^c(y)) = - \int dy A_\mu^b(y) w^c(y) \partial^{y,\mu} \delta(x - y). \quad (4.243)$$

Тоді вираз (4.241) можна записати як

$$\begin{aligned}
 \int dy M_f^{ad}(x, y) \delta w^d(y) &= \\
 &= - \int dy \{ w^a(y) \partial^{y,\mu} \partial_{y,\mu} \delta(x - y) - g f^{abc} A_\mu^b(y) w^c(y) \partial^{y,\mu} \delta(x - y) \} = \\
 &= / \partial^x \delta(x - y) = - \partial^y \delta(x - y) / = \\
 &= - \int dy \{ w^a(y) \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} \delta(x - y) + g f^{abc} A_\mu^b(y) w^c(y) \partial^{x,\mu} \delta(x - y) \} = \\
 &= - \int dy \{ \delta^{ad} \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} \delta(x - y) + g f^{abc} A_\mu^b(y) \delta^{cd} \partial^{x,\mu} \delta(x - y) \} w^d(y). \quad (4.244)
 \end{aligned}$$

Звідки легко отримати явний вираз для $M_f^{ad}(x, y)$, вважаючи $\delta w = w$ для малих значень параметра w :

$$M_f^{ad}(x, y) = - \{ \delta^{ad} \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} \delta(x - y) + g f^{abd} A_\mu^b(y) \partial^{x,\mu} \delta(x - y) \}. \quad (4.245)$$

Корисно буде показати альтернативний спосіб знаходження явного вигляду $M_f^{ad}(x, y)$.

$$\begin{aligned} M_f^{ad}(x, y) &= \left. \frac{\delta f^a(A_\mu^{(w)}(x))}{\delta w^d(y)} \right|_{w=0} = \int dz \frac{\delta f^a(A_\mu^{(w)}(x))}{\delta A_\nu^{c(w)}(z)} \cdot \frac{\delta A_\nu^{c(w)}(z)}{\delta w^d(y)} \Big|_{w=0} = \\ &= |\delta J(z)/\delta J(y) = \delta(z-y), (4.236)| = - \int dz \frac{\delta f^a(A_\mu^{(w)}(x))}{\delta A_\nu^{c(w)}(z)} D_\nu^{z,cd} \delta(z-y), \end{aligned} \quad (4.246)$$

де

$$D_\nu^{z,cd} = \delta^{cd} \partial_\nu^z + g f^{cbd} A_\nu^b(z) \quad (4.247)$$

та ми врахували, що похідна ∂_μ^z діє на змінну z та не впливає на варіаційну похідну, що визначається як зміна форма функції при фіксованому значенні аргументу, тобто $\partial_\mu^z \delta w^c(z)/\delta w^d(y) = \delta^{cd} \partial_\mu^z \delta(z-y)$.

Використавши явний вигляд для функції f (4.239), отримаємо

$$\frac{\delta f^a(A_\mu^{(w)}(x))}{\delta A_\nu^{c(w)}(z)} = \frac{\partial_x^\mu \delta A_\mu^{a(w)}(x)}{\delta A_\nu^{c(w)}(z)} = \delta_\nu^\mu \delta^{ac} \partial_x^\mu \delta(x-z). \quad (4.248)$$

Підставивши (4.248) в (4.246), отримуємо

$$\begin{aligned} M_f^{ad}(x, y) &= - \int dz \delta_\nu^\mu \delta^{ac} \partial_x^\mu \delta(x-z) (\delta^{cd} \partial_\nu^z + g f^{cbd} A_\nu^b(z)) \delta(z-y) = \\ &= - \int dz \partial_x^\mu \delta(x-z) (\delta^{ad} \partial_\mu^z + g f^{abd} A_\mu^b(z)) \delta(z-y). \end{aligned} \quad (4.249)$$

Врахувавши, що $\partial^z \delta(z-x) = -\partial^x \delta(z-x)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \int dz \partial_x^\mu \delta(x-z) \partial_\mu^z \delta(z-y) &= -\partial_x^\mu \partial_\mu^y \int dz \delta(x-z) \delta(z-y) = \\ &= -\partial_x^\mu \partial_\mu^y \delta(x-y) = \partial_x^\mu \partial_\mu^x \delta(x-y), \end{aligned} \quad (4.250)$$

$$\begin{aligned} \int dz \partial_x^\mu \delta(x-z) A_\mu^b(z) \delta(z-y) &= \partial_x^\mu \int dz \delta(x-z) \delta(z-y) A_\mu^b(z) = \\ &= A_\mu^b(y) \partial_x^\mu \delta(x-y). \end{aligned} \quad (4.251)$$

Підставивши (4.250), (4.251) у (4.249), відновимо вираз (4.245).

Знайдемо тепер вираз для дії духового поля (4.234)

$$\begin{aligned}
 S_{ghost} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \bar{c}^a(x) \{ \delta^{ad} \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} \delta(x-y) + g f^{abd} A_{\mu}^b(y) \partial^{x,\mu} \delta(x-y) \} c^d(y) \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{c}^a(x) \left\{ \delta^{ad} \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) c^d(y) + \right. \\
 &\quad \left. + g f^{abd} \partial^{x,\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dy A_{\mu}^b(y) c^d(y) \delta(x-y) \right\} = \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{c}^a(x) \{ \delta^{ad} \partial^{x,\mu} \partial_{x,\mu} c^d(x) + g f^{abd} \partial^{x,\mu} [A_{\mu}^b(x) c^d(x)] \}. \quad (4.252)
 \end{aligned}$$

Проведемо тепер інтегрування за частинами (перекинемо похідні) та остаточно отримаємо

$$S_{ghost} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial^{x,\mu} \bar{c}^a(x) [\delta^{ad} \partial_{x,\mu} + g f^{abd} A_{\mu}^b(x)] c^d(x). \quad (4.253)$$

Відповідно духовий лагранжіан для калібрувального поля лагранжіану з симетрією $SU(n)$, у випадку калібрування Лоренца (4.239), має вигляд

$$\mathcal{L}_{ghost} = \partial^{x,\mu} \bar{c}^a(x) [\delta^{ac} \partial_{x,\mu} + g f^{abc} A_{\mu}^c(x)] c^d(x) = \partial^{x,\mu} \bar{c}^a(x) (\mathfrak{D}_{\mu} c(x))^a. \quad (4.254)$$

У випадку калібрування Лоренца для абелевої теорії, множники $f^{abc} = 0$, що означає відсутність взаємодії духових полів з калібрувальними полями. В цьому випадку вводити духові поля немає сенсу. Однак, вкажемо на важливий нюанс. В окремо взятій теорії КЕД духи фотонів не взаємодіють з іншими полями і їх справді враховувати не потрібно. Однак, в СМ фотонний дух може взаємодіяти з іншими полями через неабелеву структуру початкової групи $SU_W(2) \times U_Y(1)$.

Підсумуємо отримані результати. У калібрувальній теорії абелевої групи $U(1)$, вибір калібрування повністю усуває внесок нефізичних

поздовжніх і часових поляризацій калібрувального поля. У неабелевих калібрувальних теоріях така компенсація вже не є повною через наявність самодії калібрувальних полів. У результаті нефізичні поляризації можуть давати внесок у петльові діаграми, що порушує унітарність теорії. Для компенсації цих нефізичних внесків вводяться додаткові антикомутуючі скалярні поля, які називаються духами Фаддєєва–Попова. Зазначені поля входять лише у внутрішні лінії діаграм і не є реальними частинками.

Правила діаграмної техніки Фейнмана для роботи з духовими полями наведені, наприклад, в [90]. Проаналізувавши ці правила, можна побачити, що духові поля не взаємодіють з ферміонами, а можуть взаємодіяти лише з векторними полями, голдстоунівськими бозонами та бозоном Хіггса. Духові поля треба враховувати у петльових діаграмах з тричастинковими взаємодіями калібрувальних полів між собою та з тричастинковими взаємодіями за участі калібрувальних полів з голдстоунівськими бозонами або з бозоном Хіггса, коли обидва кінця лінії духових полів не взаємодіють з ферміонами. Прикладом такої взаємодії є друга петльова діаграма на Рис.18.

Отриманий лагранжіан духових полів (4.254) безпосередньо застосовується для опису духів Фаддєєва–Попова в квантовій хромодинаміці. Нагадаємо, що навіть після спонтанного порушення електрослабкої симетрії та переходу до унітарного калібрування лагранжіан СМ залишається інваріантним відносно калібрувальної групи $SU_C(3) \times U_{EM}(1)$. Тому, навіть при унітарному калібруванні в електрослабкому секторі, якщо для глюонних полів використовується стандартне R_ξ -калібрування (4.215), (4.216), то при обчисленні петльових діаграм, що містять внутрішні глюонні лінії, необхідно враховувати також внесок духів Фаддєєва–Попова.

В унітарному калібруванні електрослабкого сектора СМ духи Фаддєєва–Попова повністю відокремлюються від фізичних полів. Тому при побудові діаграм Фейнмана як на деревному, так і на петльовому рівнях слід враховувати лише фізичні поля фотонів, W та Z бозонів. В загальному випадку R_ξ калібрування електрослабкого сектора СМ (4.215), (4.217) – (4.220), духові поля, що відповідають фотонам, W та Z бозонам, взаємодіють з іншими полями СМ, див. [90]. І хоча на рівні деревинних діаграм вони не себе не проявляють, їх внесок повинен враховуватися у петльових діаграмах.

Корисно зазначити, що існує калібрування, у якому духи Фаддєєва–

Попова не взаємодіють з полями СМ. Це так зване аксіальне калібрування. У цьому випадку духові поля повністю відокремлюються від фізичного сектора теорії, не дають внеску у фізичні амплітуди і тому можуть не враховуватися при побудові діаграм Фейнмана.

В аксіальному калібруванні калібрувальна умова має вигляд

$$n_\mu A^\mu = 0, \quad (4.255)$$

де n^μ — фіксований сталий ненульовий чотиривектор $n^\mu \neq 0$. Залежно від вибору вектора n^μ отримують різні різновиди аксіального калібрування.

Якщо n^μ є просторовоподібним, наприклад $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$, то калібрувальна умова набуває вигляду $A^3 = 0$. Таке калібрування називають просторовим аксіальним калібруванням. Якщо n^μ є часовоподібним, $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, то отримуємо умову $A^0 = 0$, яка відповідає темпоральному калібруванню. Нарешті, якщо n^μ є світлоподібним, $n^2 = 0$, наприклад, $n^\mu = (1, 0, 0, 1)$, то калібрувальна умова має вигляд $n_\mu A^\mu = 0$. Таке калібрування називають світлоконусним і воно широко використовується в КХД [93, 96].

РОЗДІЛ 5

Проблеми Стандартної Моделі

Вступ

Поставимо важливе питання: чи є СМ тією моделлю, що повністю описує фізику елементарних частинок?

Ми чітко знаємо, що існування всіх частинок, що входять до лагранжіана СМ, експериментально підтверджено. Також відомо, що СМ коректно та із вражаючою точністю описує багаточисельні експерименти у фізиці елементарних частинок, що реалізуються на прискорювачах із енергіями частинок до сотень GeV , а в окремих випадках, і до десятків TeV . Виходячи з цього, можна було б сказати, що СМ є правильною фізичною моделлю в зазначеному діапазоні енергій, а відповідь на питання чи є СМ правильною моделлю при більших енергіях частинок, треба досліджувати на прискорювачах нового покоління. Однак уже зараз є ряд проблем, які СМ однозначно вирішити не може, і які однозначно свідчать про те, що СМ не є повною фізичною моделлю та потребує модифікації. Зупинимось детальніше на цих проблемах.

5.1 Масивні нейтрино

Історично, окрім ароматних назв електронних, мюонних та τ -нейтрино, вживаються і інші позначення. Виділяють *сонячні*, *атмосферні* та *реакторні* нейтрино.

Сонячні нейтрино – електронні нейтрино з енергією до 10 MeV, що утворюються в Сонці в результаті термоядерних реакцій. Експерименти, що почалися ще в 60-х роках XX століття показали, що потік сонячних нейтрино, що спостерігається на Землі, приблизно втричі менший за потік, що теоретично передбачається в стандартній сонячній моделі. Цей факт отримав пояснення лише після відкриття нейтринних осциляцій, див. далі.

Атмосферні нейтрино – суміш мюонних та електронних нейтрино, що утворюються в атмосфері Землі під дією високоенергетичних частинок з космосу. Оскільки космічні частинки мають величезний діапазон енергій і обмежені лише порогом Грайзена-Зацепіна-Кузьміна ($6 \cdot 10^{19}$ eV), то енергії атмосферних нейтрино знаходяться у дуже широкому діапазоні (від декількох сот MeV до декількох TeV). Відстань яку вони проходять після народження в атмосфері до детектора становить від 10 км (нейтрино утворюються над детектором) до 10000 км (нейтрино утворюються в атмосфері на протилежній стороні Землі). При спостереженні атмосферних нейтрино, з енергією менше за 1 GeV, виявилось, що зенітно-кутовий розподіл потоку електронних нейтрино виявився незалежним від азимутального кута, а от потік мюонних нейтрино з-під Землі виявився меншим за потік мюонних нейтрино зверху, див. Рис. 19. Даний факт був вперше помічений у 1998 році і явно вказував на наявність нейтринних осциляцій

Реакторні нейтрино – електроні антинейтрино з енергією в декілька MeV, що утворюються в ядерних реакторах. Важливі тим, що дозволяють провести вимір потоку електронних антинейтрино на довільних відстанях від джерела.

На межі XX та XXI століття сукупність даних спостережень сонячних, атмосферних та *реакторних* нейтрино однозначно показали, що нейтрино самовільно переходять із одного ароматного стану в інший. Це явище відоме як нейтринні осциляції. Суть проблеми полягає в тому, що осциляції можуть відбуватися лише між частинками, що мають різні маси, а отже, наявність осциляцій цілком однозначно вказує на те, що нейтрино є масивними частинками [78]. Зі спостережень

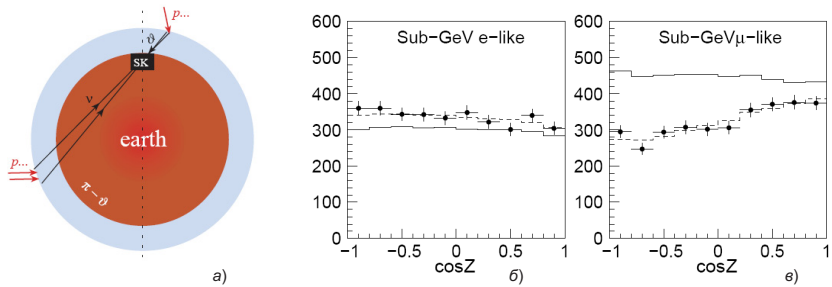


Рис. 19: а) шлях, який проходять нейтрино, що утворюються в різних точках атмосфери Землі (Earth) до попадання на детектор Super-Kamiokande (SK) [97, 98]; б), в) дані SK: по вертикальній осі відкладено кількість зареєстрованих нейтрино та антинейтрино з енергією меншою за 1 GeV в залежності від азимутального кута; по горизонтальній осі косинус азимутального кута, що змінюється від -1 (для нейтрино, що йдуть знизу) до $+1$ (для нейтрино, що йдуть згори). Рис. б) — електронні нейтрино, Рис. в) — мюонні нейтрино.

осциляцій нейтрино можна встановити значення різниці квадратів мас нейтрино¹ [97]:

$$\begin{aligned}\Delta m_{atm}^2 &= |\Delta m_{23}|^2 = (2.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{eV}^2; \\ \Delta m_{sol}^2 &= |\Delta m_{12}|^2 = (8.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-5} \text{eV}^2.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Як видно, маси нейтрино характеризуються лише двома величинами Δm_{12}^2 та Δm_{23}^2 ($\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$). Це пов'язано з тим, що значення Δm_{13}^2 можна знайти з умови:

$$\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2 + \Delta m_{31}^2 = 0, \quad (5.2)$$

звідки маємо $|\Delta m_{31}^2| = |\Delta m_{23}^2| \pm |\Delta m_{12}^2|$.

¹Перше підтвердження існування (атмосферних) нейтринних осциляцій було зроблено колаборацією Super-Kamiokande у 1998 році [98, 99]. Про важливість даного відкриття свідчить той факт, що президент США Білл Клінтон у 1998 році зробив окрему промову стосовно наявності маси у нейтрино [100]. У 2001 році колаборацією SNO спостерігались осциляції сонячних нейтрино. У 2015 році Такаакі Кадзіта (Super-Kamiokande) та Артур Макдональд (SNO) отримали Нобелівську премію з фізики за експериментальне підтвердження існування явища нейтринних осциляцій.

Слід вказати, що з даних на різницю квадратів мас $\Delta m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$ та $\Delta m_{23}^2 = m_2^2 - m_3^2$ не випливає однозначне визначення безпосередньо мас нейтрино. Справді, якщо до кожного квадрату маси нейтрино додати одну й ту саму константу, значення $\Delta m_{12}^2, \Delta m_{23}^2$ не зміняться. Тобто, значення $\Delta m_{12}^2, \Delta m_{23}^2$ не дозволяють знайти абсолютні значення мас нейтрино. Припускаючи, що одне з нейтрино набагато легше за інші, можна визначити маси інших нейтрино. При цьому існує два формально рівнозначних випадки, що отримали назву нормальної та оберненої ієрархії нейтрино.

В нормальній ієрархії вважається, що маси нейтрино зростають у напрямку зростання їх номера. Найлегше нейтрино m_1 , найважче – m_3 , тобто $m_1 < m_2 < m_3$. Припускаючи, що $m_1 = 0$, отримаємо

$$m_1 = 0; \quad m_2 = \sqrt{|\Delta m_{sol}^2|} \approx 0.009 \text{ eV}; \quad m_3 = \sqrt{|\Delta m_{atm}^2|} \approx 0.05 \text{ eV}. \quad (5.3)$$

В оберненій ієрархії вважається, що маси нейтрино зростають у напрямку спадання їх номера. Найважче нейтрино m_1 , найлегше – m_3 , тобто $m_1 > m_2 > m_3$. Припускаючи, що $m_3 = 0$, отримаємо $m_2 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2|} \approx 0.05 \text{ eV}$. З того, що $|\Delta m_{12}^2| \ll |\Delta m_{23}^2|$, випливає приблизна рівність мас найважчих нейтрино $m_1 \simeq m_2$:

$$m_1 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2| + |\Delta m_{12}^2|} \approx m_2 \approx 0.05 \text{ eV}; \quad m_3 = 0. \quad (5.4)$$

Зазначимо, що сучасне обмеження на сумарну масу трьох нейтрино з космологічних спостережень становить $\sum m_\nu < 0.17 \text{ eV}$ [101, 102]. Отже, значення маси кожного з окремих масових станів нейтрино є меншим за 0.17 eV!

Суть питання полягає в тому, що до СМ нейтрино входять як частинки лише з лівою кіральністю, а отже, масовий доданок лагранжіана нейтринного поля не може бути записаний у тому вигляді, у якому він записується для всіх інших частинок СМ (*діраковський* формалізм опису масивних частинок):

$$\mathcal{L}_m = -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L).$$

Існує три шляхи вирішення цієї проблеми шляхом модифікації СМ:

1. Визнати, що існують нейтрино СМ з правою кіральністю ν_R , які не взаємодіють з іншими частинками СМ і, відповідно, не спостерігаються в експериментах. Такі нейтрино отримали в літературі назву

стерильних нейтрино. Очевидно, немає жодних підстав обмежувати їхню кількість трьома.

2. Визнати, що правих нейтрино у природі не існує, а масовий доданок лагранжіана задається за допомогою *майоранівського* формалізму. Його основна ідея полягає в тому, що зарядовоспряжена функція лівих нейтрино (ν_L^c) описує частинку з правою кіральністю. А повна функція нейтрино є істинно нейтральною функцією $\chi = \nu_L + \nu_L^c = \chi^c$. У цьому випадку введення нових частинок із правою кіральністю не є необхідним. Масовий лагранжіан має вигляд: $\mathcal{L}_m = -m\bar{\chi}\chi = -m(\bar{\nu}_L\nu_L^c + \bar{\nu}_L^c\nu_L)$.

3. Третій варіант (*дірак-майоранівський* формалізм) є комбінацією перших двох і становить найбільш загальний випадок визначення маси частинок. До масового лагранжіана входять функції як лівих, так і правих частинок, а також їхні зарядовоспряжені функції: $\nu_L, \nu_R, \nu_L^c, \nu_R^c$.

На даний момент експериментальні дані не можуть дати відповідь на питання, чи є нейтрино діраковськими або майоранівськими частинками, та чи має для них місце нормальна або обернена ієрархія, див. детальніше [78, 97] та Розділ 7.3.

5.2 Проблема темної матерії та темної енергії

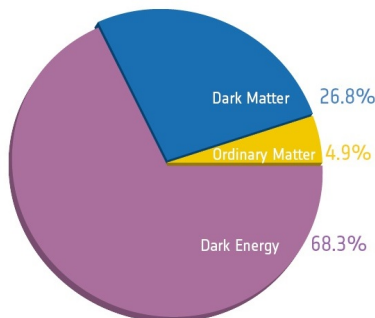


Рис. 20: Склад Всесвіту згідно результатів досліджень анізотропії реліктового випромінювання космічним телескопом "Планк", джерело <https://www2.physics.ox.ac.uk/research/dark-matter-dark-energy>.

Сучасне значення просторової густини енергії у Всесвіті становить $\rho \simeq 9.47 \cdot 10^{-27} \text{ кг/м}^3$. Щоб зрозуміти малість значення цієї величини зазначимо, що вона ефективно відповідає знаходженню трохи більше ніж 5 протонів ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$) на кубічний метр простору. Склад просторової густини енергії Всесвіту вважається наступним, див. Рис. 20: близько 5% становить внесок відомої речовини – баріонів (протонів, нейтронів тощо), лептонів та фотонів, а решта 95%, як не дивно для фізично правильної теорії, становить те, чому зараз немає пояснення [75].

Темна матерія

Серед невідомої субстанції, що заповнює Всесвіт, близько 26.8% становить так звана *темна матерія*, тобто щось, що має здатність кластеризуватися та скупчуватися поблизу масивних об'єктів [103–105]. Доказом існування темної матерії є дані про гравітаційні потенціали (розподіл мас) у галактиках (скупченнях галактик), що отримуються із досліджень гравітаційного лінзування, з аналізу руху зірок на периферії галактик, або з аналізу зіткнень галактичних кластерів. Результати спостережень показують, що справжня маса галактик (скупчень галактик) є набагато більшою за масу видимої матерії у них, див. Рис. 21. Найвірогідніше, темну матерію становлять деякі масивні стабільні частинки, котрі не взаємодіють із відомими частинками СМ

і виявляють себе лише завдяки гравітаційній взаємодії. На даний час точно відомо, що ці частинки не є частинками СМ. Спостереження проявів темної матерії явно вказує на необхідність модифікації СМ.

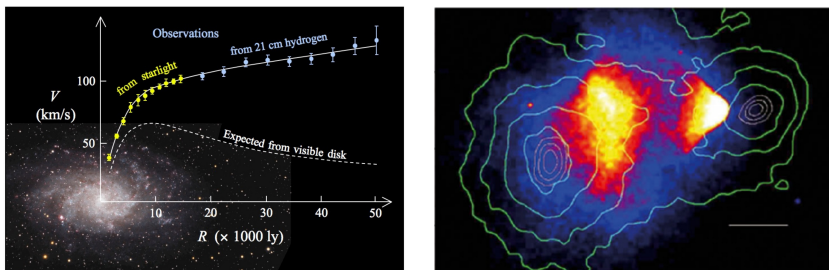


Рис.20: Малюнок зліва – крива обертання галактики M33 (залежність орбітальної швидкості зірок та газу в галактиці від відстані до центру галактики) [106], джерело – https://en.wikipedia.org/wiki/Galaxy_rotation_curve. Нижня крива – теоретичне передбачення швидкості зірок з відомого розподілу речовини у галактиці. Верхня крива – дані спостережень. Поведінка верхньої кривої вказує на наявність додаткової маси у галактиці, яка виходить за межі видимої частини галактики. Малюнок праворуч – скупчення 1E0657-558 (праворуч менший кластер Куля (Bullet Cluster), що налітає на більший кластер), яке складається з двох скупчень галактик, що стикаються [107]. При зіткненні скупчень галактик безпосереднього зіткнення зірок не відбувається, однак відбувається електромагнітна взаємодія газу у міжгалактичному просторі, який становить більшу частину баріонної речовини у скупченнях. В результаті спостерігається рентгенівська світимість – яскрава область на малюнку. Кольори вказують на рентгенівську температуру плазми: синій – найхолодніший, а білий – найгарячіший. Область ззовні – реконструйований розподіл мас у скупченнях, виходячи з даних гравітаційного лінзування. Безпосередньо видно, що баріонна частина скупчень складає лише малу частину загальної маси скупчень.

Результати зіткнення кластеру Куля представлені на Рис.21. Важливо також вказати на результати дослідження зіткнення у галактичному скупченні MACS J0018.5+1626. Це зіткнення відрізняється від зіткнення в скупченні Куля тим, що одна складова скупчення MACS J0018.5+1626 рухається майже прямо до Землі, а інша віддаляється.

При зіткненні галактичних скупчень окремі галактики не проваємодіяли, але міжгалактичні газові хмари проваємодіяли між собою за рахунок електромагнітних сил та уповільнилися. Темна ж матерія продовжила рухатися далі. Відбулося розділення баріонної та темної матерії¹ [108].

Серед можливих кандидатів на роль темної матерії є стерильні праві нейтрино з масами в кілька кеВ [109–111] (див. детальніше Розділ 7.3), аксіоноподібні (псевдоскалярні) частинки з масами μeV [112] (див. детальніше Розділ 7.7), слабо взаємодіючі масивні частинки (WIMPs – Weakly Interacting Massive Particles) з масою ~ 100 ГеВ [113]:

- це гіпотетичні елементарні частинки, які взаємодіють гравітаційно та через силу (сили), що є такою як слабка взаємодія або слабкішою. Якщо WIMP утворюються термічно в ранньому Всесвіті як і частинки Стандартної Моделі, то для отримання правильної кількості темної матерії переріз анігіляції WIMP має дорівнювати $\sigma v \sim 3 \cdot 10^{-26} \text{ см}^3/\text{сек}$, що приблизно відповідає перерізу анагіляції частинок з масою порядку 100 ГеВ, що мають слабку взаємодію між собою.

Однак кандидатами на роль темної матерії можуть бути також, наприклад, первинні чорні діри [114, 115]

- гіпотетичний тип чорної діри, що утворилася не за рахунок гравітаційного колапсу великої зорі, а в надщільній матерії в момент початкового розширення Всесвіту. Вважається, що первинні чорні діри з масами від 10^{14} кг до 10^{23} кг можуть становити темну матерію (такі значення мас відповідають масам астероїдів). Такі чорні діри будуть стабільними. Чим більшою є їх маса, тим більше часу вони можуть існувати. Наприклад, чорна діра з масою 10^{11} кг матиме час життя порядку часу життя Всесвіту.

та Бозе-Ейнштейнівський конденсат ультралегких безспінових частинок з масою порядку $10^{-23} - 10^{-21}$ еВ [116, 117].

¹ Див. художню візуалізацію <https://youtu.be/t7FBmBj7p0U>

Темна енергія

Ще зовсім недавно, а саме на початку ХХ століття, вважалося, що Всесвіт складається лише з нашої галактики. Лише у 1912 році дослідження туманностей призвело до обговорення питання про те, що газові туманності насправді є окремими галактиками. Як факт це було встановлено лише у 1926 році. А вже у 1927 році Жорж Леметр, а у 1929 році Едвін Габбл встановили, що Всесвіт розширюється, а швидкість взаємного віддалення (розбігання) галактик пропорційна відстані між ними. Це твердження відоме як закон Габбла — Леметра і формулюється як

$$v = H_0 d, \quad (5.5)$$

де $H_0 \approx 70$ (км/год)/Мпк, див., наприклад, [118].

Згідно з рівняннями Ейнштейна, див., наприклад, [75]

$$R_{\mu\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

кривина простору-часу визначається тензором енергії-імпульсу матерії $T_{\mu\nu}$ та доданком $\Lambda g_{\mu\nu}$, що визначає рівномірно розподілену по Всесвіту *темну енергію*. Цікаво зазначити, що на початку ХХ століття тривали дискусії, чи потрібно взагалі включати цей доданок в рівняння Ейнштейна, див. чудовий історичний огляд [119].

Використавши одне з рівнянь Фрідмана для масштабного фактора, що визначає еволюцію Всесвіту,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (5.7)$$

(p та ρ тиск та густина матерії у Всесвіті) можна побачити, що у випадку відсутності Λ -члена $\ddot{a} < 0$ і розширення Всесвіту повинно сповільнюватися, а у випадку наявності достатньо великого Λ -члена Всесвіт може розширюватися з прискоренням.

Щоб встановити чи Всесвіт розширюється з прискоренням, або з гальмуванням, дві групи (The Supernova Cosmology Project, The High-z Supernova Search Team) детально дослідили стандартні супернові типу Ia, що максимально віддалені від нас (до відстаней у 8 мільярдів світлових років). В кінці 1990-х було встановлено, що Всесвіт розширюється з прискоренням [120, 121]. Отже Всесвіт наповнений темною енергією і Λ -член повинен існувати в рівнянні Ейнштейна.

На даний час вважається, що близько 68.3% субстанції, що заповнює Всесвіт, становить так звана темна енергія. Її густина становить $\rho_{DE} \simeq 6.47 \cdot 10^{-27} \text{ кг/м}^3$ (ефективно відповідає 4 протонам на кубічний метр). Темна енергія рівномірно розподілена по всьому Всесвіту і дає домінуючий внесок у його густину [122–124]. Іншими словами, кожен однаковий елемент об'єму Всесвіту має певну сталу енергію. Якщо розглянути певну фіксовану ділянку простору, а потім збільшити її об'єм, то енергія всередині ділянки збільшиться. Отже, при розсуванні границь ділянки, вона виконає від'ємну роботу. З термодинаміки відомо, що роботу можна представити як pdV , отже, тиск темної енергії є від'ємним.

Гарним кандидатом на роль темної енергії є енергія вакууму. Звичайно, вакуумна енергія повинна взаємодіяти гравітаційно, але якщо гравітаційні поля не є дуже сильними, то густина вакуумної енергії буде однорідною та сталою у часі. Головним є те, що вакуумна енергія (на відміну від темної матерії) не буде скупчуватися навколо масивних об'єктів, що узгоджується з даними спостережень. З розмірних міркувань значення густини вакуумної енергії має бути $\sim M^4$, де M – характерний енергетичний масштаб (маса переносника) певної взаємодії [75]. Для сильної взаємодії $M \sim 1 \text{ GeV}$ та $\rho_{vac} \sim 1 \text{ GeV}^4$, для слабкої взаємодії $M \sim 100 \text{ GeV}$ та $\rho_{vac} \sim 10^8 \text{ GeV}^4$, для гравітаційної – $M \sim M_P \sim 10^{19} \text{ GeV}$ та $\rho_{vac} \sim 10^{76} \text{ GeV}^4$. Однак значення густини темної енергії в енергетичних одиницях становить величину $\rho_{DE} \sim 10^{-46} \text{ GeV}^4$, яка набагато порядків менша за наведені вище оцінки. Чому густина темної енергії є такою малою і становить головну проблему з теоретичної точки зору. Питання про природу темної енергії залишається відкритим.

5.3 Баріонна асиметрія у Всесвіті

Дані спостережень свідчать про те, що Всесвіт містить баріони (протони, нейтрони тощо) і практично не містить антибаріонів. Це означає, що на ранніх етапах розвитку Всесвіту кварків, з певних причин, виявилося більше, ніж антикварків. При цьому, природно, робиться припущення, що з самого початку, кількість утворених кварків дорівнювала кількості утворених антикварків. Оцінимо кількісне значення зазначеної асиметрії, припустивши, що залишок кварків залишився після анігіляції всіх кварк-антикваркових пар.

Вважаючи, що головним чином анігіляція кварків відбувалася у два фотони, $n_q + n_{\bar{q}} \simeq 2n_\gamma$, а надлишок кварків призвів до утворення баріонів (баріонного числа) $n_B = (n_q - n_{\bar{q}})/3$, отримаємо

$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}} \rightarrow \frac{3n_B}{2n_\gamma} \simeq 10^{-10}, \quad (5.8)$$

де $n_q, n_{\bar{q}}$ – концентрації кварків та антикварків до їхньої анігіляції¹, n_B, n_γ – концентрація баріонів (фотонів) після анігіляції, а відношення $n_B/n_\gamma = 6 \cdot 10^{-10}$ є відомим зі спостережень сучасного складу Всесвіту. Отримана оцінка означає, що перед тим, як кварк-антикваркові пари проанігілювали, на кожні 10 мільярдів кварк-антикваркових пар припадав один зайвий кварк. Порушення симетрії між електронами та позитронами має той самий порядок величини, якщо вимагати електронейтральності Всесвіту [75]. Порушення симетрії між частинками та античастинками є надзвичайно малим, але завдяки ньому сучасний Всесвіт складається переважно з частинок матерії, і це є проблемою з фізичної точки зору.

У цьому сенсі цікаво відмітити, що ще в 1933 році Поль Дірак у своїй Нобелівській лекції відзначив: "Якщо ми приймаємо точку зору, що повна симетрія між позитивними та негативними електричними зарядами є фундаментальним законом природи, то ми повинні вважати випадковістю той факт, що Земля та, ймовірно, уся Сонячна система містять надлишок звичайних негативних електронів та позитивних протонів. Цілком можливо, що деякі зорі мають іншу будову, а саме головним чином складаються з позитронів та негативних протонів. Звичайно, у Всесвіті має бути однакова кількість зірок кожного типу." Однак, як показали подальші спостереження, у видимій

¹При температурах у Всесвіті $T \gtrsim 1$ ГеВ.

частині Всесвіті структур, передбачених Діраком, не існує.

Згідно із сучасними уявленнями, Всесвіт утворився з вакуумної флуктуації, що мала планківський розмір ($l_{Pl} = 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ м}$). Першою стадією розвитку Всесвіту на даний момент вважається стадія інфляційного розширення за рахунок наявності певного скалярного поля інфлантонів (у СМ зазначене поле відсутнє). У цей період зазначена ділянка Всесвіту збільшується в розмірах за надзвичайно малий проміжок часу ($\sim 10^{-35}$ сек.) як мінімум до характерної довжини ~ 1 см. Після цього інфлантонне поле втрачає свою енергію, і його частинки починають коливатися поблизу мінімуму потенціалу, внаслідок чого інфлантони розпадаються на відомі частинки СМ, надаючи їм величезну енергію, що й призводить до початкового розігріву Всесвіту. Якщо Всесвіт справді утворився з певної квантової флуктуації, тоді сумарна його маса повинна бути близькою до нуля (енергія масивної матерії компенсується від'ємною енергією гравітаційної взаємодії). Аналогічно, природним є твердження про те, що початкові значення різноманітних квантових чисел (характеристик Всесвіту) повинні бути близькими до нуля, і баріонна асиметрія має бути певним чином згенерована у процесі еволюції Всесвіту, див., наприклад, [75, 125, 126].

Для виконання законів збережень різних квантових чисел розпад інфлантона відбувається на пари частинка-античастинка, які потім повинні були б проанігілювати одна з одною, спричинивши утворення фотонів. У цьому розумінні вираз (5.8) є дивним, однак, саме завдяки наявності дещо більшого числа кварків над антикварками у ранньому Всесвіті, у сучасному Всесвіті існує величезна кількість баріонної матерії, без якої неможливим було б існування атомів, молекул, планет тощо.

Існують загальні вимоги (вимоги Сахарова [127]) до теорії генерації баріонної асиметрії. Остання могла відбутися у ранньому Всесвіті лише за наявності певних умов, а саме:

- 1) незбереження баріонного числа;
- 2) порушення С- та CP-симетрії;
- 3) порушення термодинамічної рівноваги відносно процесів із незбереженням баріонного числа.

Перша вимога є очевидною. Якби не виконувалася друга умова, тоді процеси за участі кварків та антикварків відбувалися б однаково, і баріонна асиметрія не могла б згенеруватися. Остання ж умова є необхідною для того, щоб не відбулася зворотня еволюція до стану з

нульовим баріонним числом.

На якісному рівні друга умова (порушення С- та СР-симетрії) справді порушується в слабкому секторі СМ завдяки комплексності матриці ККМ. Виявляється, що в межах СМ, за допомогою поняття кіральної аномалії, можна задовольнити і першу умову (незбереження баріонного числа). Можна показати, що в СМ баріонна асиметрія могла бути згенерована, але за умови наявності початкової лептонної асиметрії. Такий механізм генерації баріонного числа в межах СМ отримав назву *електрослабкого баріогенезу*. Пояснимо його суть, тимчасово відклавши питання наявності початкової лептонної асиметрії.

На ранніх етапах розвитку Всесвіту (до спонтанного порушення симетрії поля Хіггса) поля матерії є безмасовими. З калібрувальними полями групи $SU_W(2)$ будуть взаємодіяти лише частинки з лівою кіральністю ізотопічних дублетів лептонів та кварків [70, 75]. Внаслідок явища кіральної аномалії, кваркові та лептонні струми не будуть зберігатися, див. (4.140). Розглянемо, що буде відбуватися з баріонним та лептонним числом з часом. Для цього треба проінтегрувати обидві частини відповідного виразу

$$\int d^4x \langle \partial^\mu j_{\mu,L}^B \rangle = \frac{BN_C N_{gen}}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}[V^{\mu\nu} \tilde{V}_{\mu\nu}] = -N_{gen}n, \quad (5.9)$$

$$\int d^4x \langle \partial^\mu j_{\mu,L_i}^L \rangle = \frac{LN_{gen}}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}[V^{\mu\nu} \tilde{V}_{\mu\nu}] = -N_{gen}n, \quad (5.10)$$

де n – ціле число, індекс Понтрягіна (6.18); множник $B = 1/3$ означає баріонний заряд кварків; $L = 1$ – лептонний заряд лептонів; $N_{gen} = 3$ є кількість поколінь, $N_C = 3$ – кількість кольорових станів. Зазначимо, що інтеграл в правій частині зводиться до інтегралу від повної похідної від деякої функції (6.9) та буде ненульовим за рахунок існування нетривіальних топологічних конфігурацій [128, 129] полів групи $SU_W(2)$, для переходу між якими треба подолати певний енергетичний бар'єр, див. детальніше Розділ 6.1.

Далі, керуючись (4.143) – (4.145) та (6.18), отримаємо, на прикладі виразу для баріонів

$$\begin{aligned} N_L^B(t_1) - N_L^B(t_0) &= -\frac{3}{16\pi^2} \frac{2}{3} \oint_S d\sigma^0 \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left[G_{(n+k)}^\nu G_{(n+k)}^\rho G_{(n+k)}^\sigma \right] \Big|_{t=t_1} + \\ &\frac{3}{16\pi^2} \frac{2}{3} \oint_S d\sigma^0 \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left[G_{(k)}^\nu G_{(k)}^\rho G_{(k)}^\sigma \right] \Big|_{t=t_0} = -3(n+k) + 3k = -3n, \end{aligned} \quad (5.11)$$

що баріонне число може змінюватися з часом. При нульовій температурі це відбувається лише за умови, коли існують так звані інстантонні розв'язки, що пов'язують вакуумні стани неабелевих калібрувальних полів з різними значеннями числа Понтрягіна та забезпечують тунельні переходи між цими станами.

При ненульових температурах такі переходи будуть обумовлені термальними ефектами та відбуватимуться класичним чином. Вони будуть описуватися сфалеронними розв'язками. Енергетичний бар'єр між різними вакуумними станами з різними індексами Понтрягіна є досить великим: $E_{sh} \sim M_W/g^2 \approx 10 \text{ TeV}$ [75]. Відповідно ймовірності переходів між станами з різним числом Понтрягіна при низьких температурах будуть надзвичайно малими і в правій частині виразу (5.11) доданки при різних моментах часу t_1 та t_0 будуть рівними. Це значить, що права частина виразу (5.11) дорівнюватиме нулю, а отже баріонні та лептонні числа будуть зберігатися окремо.

Однак при високих температурах, більших за температуру електрослабкого фазового переходу $T \sim 100 \text{ GeV}$, ймовірність тунелювання не буде прямувати до нуля і, відповідно, баріонні та лептонні числа не будуть зберігатися, див. детальніше [75]. Однак в праві частини виразів (5.9), (5.10) входять однакові польові функції. Тому в системі зберігатимуться не окремі лептонні та баріонні числа, а їх комбінація

$$B - L = \text{const}, \quad (5.12)$$

де $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ – повне лептонне число, B – повне баріонне число.

Разом з цим в системі повинен зберігатися повний гіперзаряд, що пов'язаний з $U_Y(1)$ симетрією:

$$\sum Y_i n_i = \text{const}, \quad (5.13)$$

де n_i – концентрація частинок певного типу, а підсумовування відбувається за усіма частинками в системі. Це означає, що можна ввести хімічний потенціал для окремих частинок у вигляді

$$\mu_I = \mu(B_I - L_I) + \mu_Y \frac{Y_I}{2}, \quad (5.14)$$

де B_I, L_I, Y_I – значення баріонного, лептонного та гіперзаряду для окремої частинки. Безпосередні значення баріонних та лептонних чи-

сел знаходяться з умови мінімуму великого термодинамічного потенціалу. Розрахунки показують [75], що у зазначеному проміжку температур повинно існувати додаткове співвідношення між баріонним та лептонним числом у вигляді:

$$B = C(B - L), \quad C = \frac{8\nu_f + 4\nu_s}{22\nu_f + 13\nu_s}, \quad (5.15)$$

де ν_f – кількість ферміонних поколінь, ν_s – кількість дублетів поля Хігса з масами меншими масштабу електрослабкого переходу. В СМ $\nu_f = 3$, $\nu_s = 1$, $C = 28/79$.

Тобто в рамках СМ на ранніх етапах розвитку Всесвіту можуть відбуватися процеси, що змінюють кількість баріонів та лептонів. Зокрема, якщо за рахунок певного, поки невідомого механізму, буде згенеровано початкову лептонну асиметрію (L_i) і загальне лептонне число не дорівнюватиме нулю, то за рахунок сфалеронних переходів можна отримати кінцеві значення баріонного (B_f) та лептонного (L_f) чисел при температурах нижчих за 100 ГеВ, коли такі переходи вже перестануть відбуватися. Таким чином буде виконана і третя умова Сахарова. З рівнянь

$$\begin{cases} B_f - L_f = -L_i \\ B_f = C(B_f - L_f) \end{cases} \quad (5.16)$$

легко отримати значення початкової та кінцевої лептонної асиметрії при відомому значенні кінцевої баріонної асиметрії:

$$L_i = -\frac{79}{28} B_f, \quad L_f = -\frac{51}{28} B_f.$$

Підкреслимо, що механізм електрослабкого баріогенезу не може бути реалізований в СМ, оскільки в СМ не існує механізму генерації початкової лептонної асиметрії. Проблема баріонної асиметрії може бути вирішена лише за рахунок розширення СМ (або на стадії інфляції, що також вимагає розширення СМ). Наприклад, у відповідному розширенні СМ можна ввести нову масивну частинку, котра б розпалася на ранніх етапах розвитку Всесвіту з порушенням лептонного (або баріонного) числа. Такою частинкою, зокрема, може бути важке стерильне нейтрино, див. Розділ 7.3.

РОЗДІЛ 6

Питання до Стандартної Моделі

Вступ

В даному Розділі ми розглянемо окремі результати СМ, які узгоджуються з існуючим експериментальними даними, але викликають здивування та стимулюють до роздумів стосовно повноти СМ.

6.1 Проблема СР-інваріантності сильної взаємодії

В рамках СМ нейтрон є частинкою, що складається з трьох кварків (*udd*) та має нульовий електричний заряд. Нас буде цікавити електричний дипольний момент нейтрона d_n , що визначатиме гамільтоніан взаємодії спіна нейтрона $\vec{S}$ з електричним полем $\vec{E}$, а саме: $H = d_n \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} \cdot \vec{E}$. При перетворенні обернення часу $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$, а отже, гамільтоніан взаємодії зазнає змін, див. Розділ 4.9. Тоді з СРТ-теореми випливає, що зазначений гамільтоніан взаємодії має порушувати СР-інваріантність. На даний час експериментальні прояви наявності електричного дипольного моменту у нейтрона не спостерігались. Сучасні експериментальні обмеження складають [130]: $d_n < 3 \cdot 10^{-28}$ е · м (заряд електрона, що множиться на метр).

В слабкому секторі СМ джерелом порушення СР-інваріантності є комплексна фаза матриці Кабіббо-Кобаяши-Маскави, див. (4.181), (4.182). Теоретичні розрахунки [131] показують, що магнітний момент нейтрона в цьому випадку може бути лише $d_n \sim 10^{-36}$ е · м. Таке мале значення пов'язано з наявністю ненулевих внесків лише при врахуванні радіаційних поправок в трьохпетльовому наближенні, внески нижчих порядків тотожно скорочуються внаслідок унітарності матриці ККМ.

В сильному секторі СМ лагранжін КХД (4.95) є інваріантним відносно дії окремих С-, Р-, Т-перетворень, див. Табл. 3 – 4. Однак, не зважаючи на цей факт, з теоретичної точки зору в сильному секторі СМ слід очікувати наявності певного нового джерела порушення СР-інваріантності, що має призвести до існування електричного дипольного моменту у нейтрона суттєво більшого за наявні експериментальні обмеження. Проблема полягає у тому, чому ми не спостерігаємо порушення СР-інваріантності у КХД.

Пояснити можливість існування джерела СР-порушення у КХД можна припустивши наявність в лагранжіані останнього нових доданків, що явно порушують СР-інваріантність. Обґрунтувати їх введення можна двома способами.

По-перше, з точки зору "все що не заборонено може існувати у природі". Принцип локальної калібрувальної інваріантності та перенормовності теорії не забороняє нам додати до лагранжіану КХД доданок, що явно порушує СР-інваріантність, див. Розділ 4.9,

$$\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD} + \Delta\mathcal{L}, \quad \Delta\mathcal{L} = \frac{\bar{\theta}}{16\pi^2} \text{Tr}[\tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu}] = -\bar{\theta} \frac{g_s^2}{32\pi^2} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (6.1)$$

де $\tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} G_{\lambda\rho}$ – тензор, дуальний до тензору $G^{\mu\nu}$. Кількісне значення порушення СР-інваріантності визначається безрозмірним параметром $\bar{\theta}$.

По-друге, даний доданок є безпосереднім наслідком складної будови вакууму калібрувальних полів групи $SU(3)$. Пояснимо сказане.

Складна структура вакууму в неабелевих теоріях, θ -вакуум

Якщо вважати вакуумним станом стан з найменшою енергією, то виходячи з визначення енергії калібрувального поля (2.100), його вакуумний стан визначається з умови $G_{\mu\nu} = 0$. Однак даній умові задовольнятиме не лише випадок відсутності глюонного поля $G_\mu = 0$, а й випадок поля, що є "чистим калібруванням", див. (2.30),

$$G_\mu \sim w \partial_\mu w^{-1}. \quad (6.2)$$

Справді, як легко переконатися,

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + [G_\mu, G_\nu] = /(\text{6.2})/ = \\
&= \partial_\mu(w\partial_\nu w^{-1}) - \partial_\nu(w\partial_\mu w^{-1}) + w\partial_\mu w^{-1}w\partial_\nu w^{-1} - w\partial_\nu w^{-1}w\partial_\mu w^{-1} = \\
&= \partial_\mu w\partial_\nu w^{-1} - \partial_\nu w\partial_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1}w\partial_\nu w^{-1} - w\partial_\nu w^{-1}w\partial_\mu w^{-1} = \\
&= / \partial_\mu w \cdot w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1} = 0 / = \partial_\mu w\partial_\nu w^{-1} - \partial_\nu w\partial_\mu w^{-1} - \\
&\quad - \partial_\mu w w^{-1}w\partial_\nu w^{-1} + \partial_\nu w w^{-1}w\partial_\mu w^{-1} = 0. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Якщо накласти на функції w умову $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 1$, то їх можна класифікувати за належністю до гомотопічних секторів, що характеризуються топологічним зарядом¹ (індексом Понтрягіна) [132–134] у формі (див. далі пояснення змісту у (6.18))

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{24\pi^2} \oint_S d\sigma^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr}[G_{(n)}^\nu G_{(n)}^\lambda G_{(n)}^\rho] = \\
&= \frac{1}{24\pi^2} \oint_S d\sigma^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr}[w_n(\partial^\nu w_n^{-1})w_n(\partial^\lambda w_n^{-1})w_n(\partial^\rho w_n^{-1})], \quad (6.4)
\end{aligned}$$

де S – 3-вимірна поверхня, віднесена на нескінченність. Топологічний заряд n може приймати цілі додатні, цілі від’ємні значення або нуль². Це означає, що існує нескінченна кількість вакуумних станів, котрі можна класифікувати за індексом Понтрягіна:

$$\ldots | -2 \rangle, | -1 \rangle, | 0 \rangle, | 1 \rangle, | 2 \rangle \ldots \quad (6.5)$$

Отже, вакуум в неабелевих теоріях (і, зокрема, у КХД) має топологічну структуру.

Якщо критично подивитися на вираз (6.5), то можна побачити дивну річ, а саме те, що ліва частина є цілим числом, а права залежить від сталої зв’язку g_s ($G_\mu = -ig_s T^a G_\mu^a$), яка є нецілим числом, значення якого ще й змінюється при зміні масштабу енергій взаємодій. Тому, незалежність індексу Понтрягіна від сталої g можна показати ввівши заміну $G_\mu^a = f_\mu^a / g$ (*rescaling trick*). При цьому

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \Rightarrow$$

¹Число n визначає ступінь відображення, або кількість разів, яку група $SU(2)$ обертається навколо поверхні S^3 , що віднесена на нескінченність. В якості прикладу відзначимо, що для групи $U(1)$ це б означало кількість намоток навколо вирізаної точки на площині. Тобто число n має топологічну природу.

²В [63] для певного вибору функції w явно проведено інтегрування (6.5).

$$G_{\mu\nu}^a = \frac{1}{g_s} (\partial_\mu f_\nu^a - \partial_\nu f_\mu^a + f^{abc} f_\mu^b f_\nu^c) = \frac{1}{g_s} \bar{G}_{\mu\nu}^a$$

також пропорційно $1/g_s$. Отже G_μ та $G_{\mu\nu}$ також не залежатимуть від сталої¹ g_s [135–137].

Важливо зазначити, що маючи польову функцію з індексом Пон-трягіна n , її можна представити у вигляді

$$G_{(n)}^\mu = w_n \partial^\mu (w_n)^{-1}, \quad w_n = w_1 w_{n-1} = w_1^n, \quad (6.6)$$

тобто за допомогою калібрувальних перетворень можна записати зв'язок між польовими функціями $G_{(n+1)}^\mu$ та $G_{(n)}^\mu$:

$$\begin{aligned} G_{(n+1)}^\mu &= w_1 w_1^n \partial^\mu [(w_1^n)^{-1} (w_1)^{-1}] = \\ &= w_1 w_1^n \{ [\partial^\mu (w_1^n)^{-1}] (w_1)^{-1} + (w_1^n)^{-1} \partial^\mu (w_1)^{-1} \} = \\ &= w_1 w_1^n [\partial^\mu (w_1^n)^{-1}] (w_1)^{-1} + w_1 \partial^\mu (w_1)^{-1} = w_1 G_{(n)}^\mu (w_1)^{-1} + G_{(1)}^\mu. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Задаємо тепер, що лагранжіан квантової електродинаміки (теорія з $U(1)$ симетрією) не містить доданка $\sim \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, оскільки його можна представити у вигляді дивергенції від деякого вектора

$$\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \partial^\mu K_\mu, \quad K_\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\rho A^\sigma. \quad (6.8)$$

Це означає, що при знаходженні дії ($S = \int d^4x \mathcal{L}$) інтеграл від даного доданку зведеться до поверхневого інтегралу і даватиме нуль² вважаючи, що на нескінченно віддаленій поверхні польові функції мають дорівнювати нулеві. Остання вимога є природньою, оскільки якщо польові функції векторного поля на нескінченності не обертаються в нуль, то повна енергія системи буде нескінченною³. Тобто

¹Так заміна функцій калібрувальних полів є гарною для теорії калібрувальних полів без їх взаємодій з частинками матерії, бо інакше в подовженій похідній також зникне стала зв'язку і буде незрозуміло чим обумовлена взаємодія: $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ при заміні $A_\mu = f_\mu/g$ переходить в $D_\mu = \partial_\mu - if_\mu$.

²Це буде не так для простору-часу розмірності $1+1$, якщо одновимірний простір з'єднати у кільце. Тоді польові функції в точці $\varphi = 0$ та $\varphi = 2\pi$ будуть співпадати, польові функції можна класифікувати за першою гомотопічною групою і внесок в дію від доданка $\sim \int dx_1 dx_0 \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \int d\sigma^\mu K_\mu$ буде ненульовим.

³Можна також вважати, що на нескінченності векторне поле групи $U(1)$ є чистою калібрувкою $A_\mu = \partial_\mu \alpha$, тоді $K_\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \alpha \partial^\rho \partial^\sigma \alpha \equiv 0$ за рахунок властивостей символу Леві-Чивіті.

доданок $\sim \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ не даватиме внеску в спостережувані величини і його можна прибрати ($\int d^4x \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$).

У випадку неабелевих теорій ситуація кардинально змінюється. Вираз (6.8) узагальнюється до вигляду

$$Tr[\tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu}] = -(g_s^2/2)\tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu K^\mu, \quad (6.9)$$

де K_μ називають струмом Черна-Саймонса [138]:

$$\begin{aligned} K_\mu &= Tr \left[2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(G^\nu \partial^\rho G^\sigma + \frac{2}{3} G^\nu G^\rho G^\sigma \right) \right] = \\ &= -g_s^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[G^{a,\nu} \partial^\rho G^{a,\sigma} + \frac{g_s}{3} C^{abc} G^{a,\nu} G^{b,\rho} G^{c,\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Доведення 1.

Для початку доведемо допоміжний вираз, див. (2.56):

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + [G_\mu, \tilde{G}^{\mu\nu}] = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{2} \left\{ \partial_\mu (\partial_\alpha G_\beta - \partial_\beta G_\alpha + [G_\alpha, G_\beta]) + [G_\mu, \partial_\alpha G_\beta - \partial_\beta G_\alpha + [G_\alpha, G_\beta]] \right\} = \\ &= / \text{врахування } \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} / = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ \partial_\mu (\partial_\alpha G_\beta + G_\alpha G_\beta) + [G_\mu, \partial_\alpha G_\beta + G_\alpha G_\beta] \right\} = \\ &= / \text{розкрити дужки, врахувати } \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} / = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \triangleleft Tr[G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}] &= Tr[(\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu) \tilde{G}^{\mu\nu} + (G_\mu G_\nu - G_\nu G_\mu) \tilde{G}^{\mu\nu}] = \\ &= / \text{в останньому доданку циклічно переставляємо під знаком Tr} / = \\ &= Tr\{(\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu) \tilde{G}^{\mu\nu} + G_\mu [G_\nu, \tilde{G}^{\mu\nu}]\} = / [G_\nu, \tilde{G}^{\mu\nu}] = (6.11) = -\partial_\nu \tilde{G}^{\mu\nu} / = \\ &= Tr[(\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu) \tilde{G}^{\mu\nu} - G_\mu \partial_\nu \tilde{G}^{\mu\nu}] = Tr[\partial_\mu G_\nu \tilde{G}^{\mu\nu} - \partial_\nu (G_\mu \tilde{G}^{\mu\nu})] = \\ &= Tr\{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [(\partial_\mu G_\nu)(\partial_\alpha G_\beta + G_\alpha G_\beta) - \partial_\nu (G_\mu \partial_\alpha G_\beta + G_\mu G_\alpha G_\beta)]\} = \\ &= Tr\{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [2\partial_\mu (G_\nu \partial_\alpha G_\beta) + \partial_\mu (G_\nu G_\alpha G_\beta) + (\partial_\mu G_\nu)(G_\alpha G_\beta)]\} = \\ &= / \text{перестановка під знаком Tr та врахування } \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{ дає } (\partial_\mu G_\nu)(G_\alpha G_\beta) = \partial_\mu (G_\nu G_\alpha G_\beta) / 3 / = \\ &= Tr\{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [2\partial_\mu (G_\nu \partial_\alpha G_\beta + \frac{2}{3} G_\nu G_\alpha G_\beta)]\} \triangleright \end{aligned} \quad (6.12)$$

Доведення 2.

$$\begin{aligned} \triangleleft K_\mu &= Tr \left[2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(G^\nu \partial^\rho G^\sigma + \frac{2}{3} G^\nu G^\rho G^\sigma \right) \right] = Tr \left[2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(G^\nu \partial^\rho G^\sigma + \frac{2}{3} \frac{G^\nu G^\rho - G^\rho G^\nu}{2} G^\sigma \right) \right] = \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[(-ig_s)^2 Tr[T^a T^b] G^{a,\nu} \partial^\rho G^{b,\sigma} + \frac{(-ig_s)^3}{3} Tr[[T^a, T^b]_- T^c] G^{a,\nu} G^{b,\rho} G^{c,\sigma} \right] = \\ &= / (D1.7) / = -g_s^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[G^{a,\nu} \partial^\rho G^{a,\sigma} + \frac{g_s}{3} C^{abc} G^{a,\nu} G^{b,\rho} G^{c,\sigma} \right] \triangleright \end{aligned} \quad (6.13)$$

На перший погляд, доданок $\sim \int d^4x Tr[\tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu}]$ перейде у інтеграл за гіперповерхнею $\sim \int d\sigma^\mu K_\mu$ і має давати нульовий внесок в дію, а отже, його також не потрібно враховувати. Однак, на відміну від випадку теорії з $U(1)$ симетрією, в неабелевих теоріях існують такі розв'язки [63, 132], для яких значення інтеграла $\int d^4x \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a =$

$\int d^4x \partial_\mu K^\mu$ є ненульовим та скінченим. Для таких розв'язків тензор $G_{\mu\nu}$ має прямувати до нуля при $|x| \rightarrow \infty$, або калібрувальне поле має на нескінченності переходити у чисте калібрування

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G_{(n)}^\mu = w_{(n)} \partial^\mu w_{(n)}^{-1}, \quad w \in SU(3). \quad (6.14)$$

При цьому при скінченних значеннях x $G_{\mu\nu}$ не повинно дорівнювати нулю, отже енергія такої польової конфігурації добре визначена і скінченна.

В цьому випадку внесок в дію матиме вигляд

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] = /(\text{6.9})/ = -\frac{1}{16\pi^2} \oint_S d\sigma^\mu K_\mu = \\ & = -\frac{1}{16\pi^2} \oint_S d\sigma^\mu \text{Tr} \left[2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(G^\nu \partial^\rho G^\sigma + \frac{2}{3} G^\nu G^\rho G^\sigma \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

На нескінченно віддаленій поверхні $G_{\mu\nu} = 0$, отже $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu + [G^\mu, G^\nu]) = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu G^\nu + G^\mu G^\nu) = 0$. Тоді поблизу множника Леві-Чивіті $G^\nu \partial^\rho G^\sigma = -G^\nu G^\rho G^\sigma$ і ми отримаємо:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu(n)} G^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{3} \oint_S d\sigma^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left[G_{(n)}^\nu G_{(n)}^\rho G_{(n)}^\sigma \right] = \\ & \frac{1}{24\pi^2} \oint_S d\sigma^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} [w_{(n)} (\partial^\nu w_{(n)}^{-1}) w_{(n)} (\partial^\rho w_{(n)}^{-1}) w_{(n)} (\partial^\sigma w_{(n)}^{-1})] = n \end{aligned} \quad (6.16)$$

і це буде ціле число, індекс Понтрягіна (6.5). Отже, дія для модифікованого лагранжіану КХД (6.1) набуде вигляду

$$S_{modif} = \int d^4x (\mathcal{L}_{QCD} + \Delta\mathcal{L}) = S_{QCD} - \bar{\theta}n. \quad (6.17)$$

Отже, дивний коефіцієнт в додатковому лагранжіані $\Delta\mathcal{L}$ (6.1) перед $\bar{\theta}$ був введений для того, щоб в кінці отримати красиву відповідь для додаткової дії $\Delta S = -\bar{\theta}n$.

Обравши калібровку, у якій $G_0^a = 0$ (тут a – груповий індекс, 0 – лоренцевський індекс), інтеграл у (6.16) можна представити через різницю інтегралів за просторовим об'ємом (3-вимірною поверхнею в 4-вимірному просторі часі) при $ct \rightarrow +\infty$ та $ct \rightarrow -\infty$:

$$-\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu(n)} G^{\mu\nu}] =$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{3} \oint_S d\sigma^0 \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left[G_{(n+k)}^\nu G_{(n+k)}^\rho G_{(n+k)}^\sigma \right] \Big|_{ct=+\infty} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{3} \oint_S d\sigma^0 \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left[G_{(k)}^\nu G_{(k)}^\rho G_{(k)}^\sigma \right] \Big|_{ct=-\infty} = (n+k) - k = n. \quad (6.18)$$

При цьому польові функції G_μ матимуть складний вигляд у всьому 4-вимірному просторі-часі (не є чистим калібруванням), але на зазначених поверхнях будуть чистим калібруванням з різним значенням індексу Понтрягіна:

$$G^\mu(t \rightarrow -\infty) = G_{(k)}^\mu, \quad G^\mu(t \rightarrow +\infty) = G_{(k+n)}^\mu. \quad (6.19)$$

Оскільки для переходу системи з вакууму з одним індексом Понтрягіна до іншого треба пройти через не чисто калібрувальну конфігурацію для якої $G_{\mu\nu} \neq 0$, яка матиме певну енергію (не вакуумний стан), то повинен відбутися тунельний перехід.

Важливим є те, що в неабелевих теоріях (якою є КХД) існують польові розв'язки, що описують тунельний перехід між різними вакуумними станами при нульовій температурі¹ (6.19). Вони отримали назву *інстантонних розв'язків* від англ. *instant* – миттєвий. Ймовірність такого тунельного переходу визначається як [139]

$$P_{\text{tunnel}} \sim e^{-S_{\text{inst}}}; \quad S_{\text{inst}} = \frac{8\pi^2}{g_s}. \quad (6.20)$$

Оскільки переходи з одного вакуумного стану у інший можливі, то справжній вакуум є суперпозицією наведених вище вакуумів та може бути представлений у вигляді

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} |n\rangle. \quad (6.21)$$

¹В ранньому Всесвіті, за високої температури, переходи між топологічними секторами теорії, що відповідають різним значенням індексу Понтрягіна, можуть відбуватися не завдяки квантовому тунельному ефекту, а класичним чином — за рахунок термічної енергії. Відповідні статичні розв'язки рівнянь руху, що описують конфігурацію поля з енергією, яка дорівнює висоті потенціального бар'єру між двома сусідніми топологічними мінімумами, називають *сфалеронними* розв'язками від грецького *σφαλερός* – слизький, ненадійний. Цей термін підкреслює, що така конфігурація поля є нестійкою: система, опинившись поблизу сфалеронного стану, спонтанно “сповзає” до одного з двох сусідніх мінімумів із меншою енергією. Ймовірність переходу між різними топологічними секторами теорії з мінімальними значеннями ефективного потенціалу $P_{\text{sph}} \sim e^{-E_{\text{sph}}/T}$ [75].

Пояснимо тепер, чому вакуумний стан саме такий. Вакуумні стани $|n\rangle$ не є калібрувальнo інваріантними. Калібрувальні перетворення типу (6.7) [133] переводять один вакуумний стан у інший: $w_1|n\rangle = |n+1\rangle$. Але справжній вакуумний стан має бути інваріантним щодо таких перетворень (з точністю до фазового множника). Цього можна досягнути лише завдяки вибору коефіцієнтів суперпозиції вакуумних станів у вигляді (6.21):

$$w_1|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} w_1|n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} |n+1\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+1)\theta} e^{-i\theta} |n+1\rangle = e^{-i\theta} |\theta\rangle, \quad (6.22)$$

де параметр θ може приймати довільне значення на проміжку $0 \leq \theta < 2\pi$, оскільки вакуумний стан (6.21) є періодичним за θ :

$$|\theta\rangle = |\theta + 2\pi\rangle. \quad (6.23)$$

Головним висновком з цього є те, що вакуумні стани $|\theta\rangle$ при різних значеннях θ є **фізично не еквівалентними станами**. Вони не переходять в стани з іншим значенням θ при калібрувальних перетвореннях: $w_1|\theta\rangle \neq |\theta'\rangle$.

Звичайно, коефіцієнти розкладу в (6.21), квадрати модулів яких визначають ймовірності знаходження в певному вакуумному стані, ще потрібно віднормувати; але головним є те, що ці ймовірності є однаковими для всіх вакуумних станів з певним індексом Понтрягіна.

Можна показати [132], що наявність переходів між різними вакуумними станами $|n\rangle$ та існування θ -вакууму у формі (6.21) забезпечується наявністю в лагранжіані КХД нового доданку¹ (6.1). Отже, цей додатковий доданок лагранжіану КХД обумовлений складною будовою вакуумних станів в неабелевій теорії КХД.

Неермітовість масової матриці кварків

Наведені вище міркування стосувалися лише лагранжіану глюонних полів КХД. Врахуємо тепер наявність кварків. Справа в тому, що масова матриця лагранжіана КХД (4.80), не обов'язково має бути ермітовою. В цьому випадку масова частина лагранжіану КХД запишеться як

¹Інтуїтивно, на якісному рівні це можна пояснити так. Твірний функціонал, що визначає амплітуду переходу між різними станами виглядає як $G \sim e^{iS}$, де S – дія (6.17), що містить доданок θn , який і входить в означення (6.21).

$$\mathcal{L}_{QCD_M} = -\bar{\psi}_{L,\alpha} M_{\alpha\beta} \psi_{R,\beta} - \bar{\psi}_{R,\alpha} (M^+)_{\alpha\beta} \psi_{L,\beta}, \quad (6.24)$$

де α, β – ароматні індекси.

Кіральні унітарні перетворення¹ $\psi_{R(L)} = U_{R(L)} \psi_{R(L)}$ (матриці $U_{R(L)}$ є елементами групи $SU_{R(L)}(N_f)$, N_f – кількість кваркових ароматів верхніх (нижніх) кварків в КХД) дозволяють записати масову матрицю кварків у діагональному вигляді, але з фазовим множником²:

$$M_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta} e^{i\theta_q}. \quad (6.25)$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD_M} &= -m_\alpha (\bar{\psi}_{L,\alpha} \psi_{R,\alpha} e^{i\theta_q} + \bar{\psi}_{R,\alpha} \psi_{L,\alpha} e^{-i\theta_q}) = \\ &= -m_\alpha \left(\bar{\psi}_\alpha \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi_\alpha e^{i\theta_q} + \bar{\psi}_\alpha \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_\alpha e^{-i\theta_q} \right) = \\ &= -m_\alpha (\bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \cos \theta_q + i \bar{\psi}_\alpha \gamma^5 \psi_\alpha \sin \theta_q) \\ &= /e^{i\gamma_5 \rho} = \cos \rho + i \gamma_5 \sin \rho / = -m_\alpha \bar{\psi}_\alpha e^{i\gamma_5 \theta_q} \psi_\alpha. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Цікавим є те, що глобальні кіральні перетворення кваркових функцій виду $q_R \rightarrow q'_R = q_R e^{i\alpha}$, $q_L \rightarrow q'_L = q_L e^{-i\alpha}$, або на рівні загальних функцій³ $q \rightarrow q' = e^{+i\gamma_5 \alpha} q$ та $\bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{q} e^{+i\gamma_5 \alpha}$ ($\bar{q} q \rightarrow \bar{q} e^{+i2\gamma_5 \alpha} q$) призводять до зміни фази масової матриці $\theta_q \rightarrow \theta_q + 2\alpha$. Кінетичні доданки кваркового лагранжіану $i\bar{q}_R \gamma^\mu \partial_\mu q_R + i\bar{q}_L \gamma^\mu \partial_\mu q_L$ при цьому очевидно не зміняться.

Глобальні перетворення кіральних кваркових функцій у вигляді

$$q_R \rightarrow q_R e^{i\alpha}, \quad q_L \rightarrow q_L e^{-i\alpha}, \quad \text{або } q \rightarrow e^{+i\gamma_5 \alpha} q. \quad (6.27)$$

отримали назву *перетворень Печчеї-Куїні* (PQ) – $U_{PQ}(1)$. Якщо лагранжіан є інваріантним відносно глобальних кіральних перетворень групи $U_{PQ}(1)$, кажуть, що він має *Печчеї-Куїні симетрію*.

¹Окремі для лівих та правих кварків, див. (4.81).

²Такий фазовий множник природньо виникає, якщо вважати, що поле Хігса набуває вакуумного середнього в точці з певною фазою. Тобто нижня копонента ізотопічного дублету поля Хігса буде $ve^{i\theta_q}/\sqrt{2}$. В неабелевих теоріях від фази θ_q легко позбутися PQ-перетвореннями ферміонних полів.

³Справедливість виразу $q \rightarrow q' = e^{+i\gamma_5 \alpha} q$ легко довести розглянувши $q'_L + q'_R$ та використавши співвідношення $e^{i\gamma_5 \rho} = \cos \rho + i \gamma_5 \sin \rho$. Вираз для $\bar{q}'$ також легко отримати: $\bar{q}' = (e^{+i\gamma_5 \alpha} q)^\dagger \gamma^0 = q^\dagger e^{-i\gamma_5 \alpha} \gamma^0 = q^\dagger \gamma^0 e^{i\gamma_5 \alpha} = \bar{q} e^{+i\gamma_5 \alpha}$.

Виявляється також, що перетворення (6.27) призводить до зміни міри інтегрування у формалізмі континуального інтегралу

$$\prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\bar{q}_i \rightarrow \exp \left(-i N_q \alpha \frac{\alpha_s}{4\pi} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \right) \prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\bar{q}_i, \quad (6.28)$$

що призводить до модифікації коефіцієнта $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 2N_q \alpha$ у виразі (6.1), де N_q – загальна кількість ароматних кваркових станів (6 для КХД). Дане перетворення відоме як *перетворення Фуджікави* [140].

Щоб позбутися комплексної фази у масових доданках кварків треба зробити PQ перетворення кожного окремого кварка на кут $2\alpha = -\theta_q$. Після такого перетворення масова матриця стане ермітовою. Зазначимо, що в загальному випадку для недіагональної масової матриці кварків можна записати $N_q \theta_q = \text{Arg}(\det M)$.

Отже ми робимо висновок, що у вираз для розширеного лагранжіану КХД (6.1) буде входити параметр $\bar{\theta} = \theta - 2N_q \alpha = \theta + N_q \theta_q$, див. [133, 141, 142], що являтиме суму параметра, що характеризує складний вакуум глюонних полів (θ), та параметра неермітовості масової матриці:

$$\bar{\theta} = \theta + \text{Arg}(\det M). \quad (6.29)$$

В цьому сенсі важливо відмітити, що аби хоч один з кварків був безмасовим ($\det M = 0$), то перетворення (6.27) на довільний кут α не змінювало б кварковий лагранжіан, але б змінювало значення $\bar{\theta} = \theta \rightarrow \theta - 2\alpha$. За рахунок зручного вибору довільної фази α значення $\bar{\theta}$ можна зробити нульовим, а КХД зробити СР-інваріантною теорією. Однак, на даний час, встановлено, що маса кожного з шістьох кварків СМ не дорівнює нулю.

Важливо відмітити, що параметр $\bar{\theta} = \theta + \text{Arg}(\det M)$ (6.29) є параметром, який вже не можна змінити PQ-перетвореннями і він є фізичним параметром теорії. Справді, при PQ-перетвореннях кварків змінюється фаза масової матриці, що призводить до зміни аргумента детермінанта масової матриці, а також, згідно механізму Фуджікави змінюється параметр вакуумної структури θ

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\det M) &\rightarrow \text{Arg}(\det M) + 2N_q \alpha, \quad \theta \rightarrow \theta - 2N_q \alpha \\ &\Rightarrow \bar{\theta} = \theta + \text{Arg}(\det M) = \text{inv}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Вважаючи, що в лагранжіані КХД існує доданок (6.1), можна аналітично розрахувати значення електричного дипольного моменту у

нейтрона, яке дорівнює [141]

$$d_n \simeq \bar{\theta} \cdot 2 \cdot 10^{-18} e \cdot m, \quad (6.31)$$

звідки, з існуючих експериментальних обмежень, випливає, що $\bar{\theta} < 10^{-10}$. Оскільки природа складових параметрів θ та $Arg(detM)$ є принципово різною, то дуже дивним є те, що вони взаємно скорочуються, а їхня сума (параметр $\bar{\theta}$) прямує до нуля.

Звичайно, напрошується питання, чому доданок типу (6.1) не вводиться у секторі СМ, що описується групою $SU_W(2)$? Для цієї неабелевої групи вакуум калібрувальних полів також матиме складну топологічну структуру, що має призвести до появи в лагранжіані додаткового доданку

$$\Delta\mathcal{L}_{EW} = \frac{\theta_{EW}}{16\pi^2} Tr[\tilde{V}^{\mu\nu} V_{\mu\nu}] = -\theta_{EW} \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{V}^{a,\mu\nu} V_{\mu\nu}^a. \quad (6.32)$$

Для початку зазначимо, що лагранжіан СМ є інваріантним відносно звичайних перетворень групи $U(1)$. При цьому розрізняють два окремих випадки.

Інваріантність відносно $U_{B+L}(1)$ перетворень, тобто $f \rightarrow e^{i(B+L)\alpha} f$, де B , L значення баріонного та лептонного чисел відповідного ферміона є справедливою для СМ на класичному рівні, але порушується для струму лівокіральних частинок на квантовому рівні завдяки явищу кіральної аномалії (5.9), (5.10):

$$\int d^4x \langle \partial^\mu j_{\mu,L}^B + \partial^\mu j_{\mu,L}^L \rangle = 2 \frac{N_{gen}}{16\pi^2} \int d^4x Tr[V^{\mu\nu} \tilde{V}_{\mu\nu}] = -2N_{gen}n, \quad (6.33)$$

оскільки в СМ з калібрувальними полями групи $SU(2)$ взаємодіють лише ліві ферміони.

В результаті перетворення ферміонів по групі $U_{B+L}(1)$ в слабкому секторі можна формально розуміти як кіральні перетворення лівих ферміонів. Це генерує по механізму Фуджікави відповідний доданок в лагранжіані і параметр $\bar{\theta}_{EW}$ змінюється на $\bar{\theta}_{EW} - 2N_f\alpha$. Для реалізації механізму Фуджікави важливо, що згортка струму (6.33) не дорівнює нулю.

Оскільки лагранжіан СМ є інваріантним відносно перетворень по $U_{B+L}(1)$, то він не змінюється і параметр α може бути будь-яким. За

допомогою нього можна зробити $\theta_{EW} - 2N_f\alpha = 0$, або сказати що взаємодія через θ_{EW} втрачає фізичний сенс [143]. В КХД так зробити не можна, бо кіральні перетворення в КХД змінюють масову матрицю кварків, що і фіксує відповідну фазу α .

Тепер зрозуміло, що масова матриця лептонів також могла бути не ермітовою і містити фазовий множник. Для позбавлення від фазового множника потрібно було б також робити відповідні PQ перетворення, що б змінило параметр взаємодії: $\bar{\theta}_{EW} = \theta_{EW} + \text{Arg}(\det M_\ell)$. Але це не важливо, оскільки навіть так модифікований параметр $\bar{\theta}_{EW}$ можна було б все одно прибрати перетворенням ферміонів по $U_{B+L}(1)$.

Стосовно інваріантності відносно $U_{B-L}(1)$ перетворень, то лагранжіан СМ звичайно буде інваріантним і відносно таких перетворень, але відповідний кіральний струм не матиме кіральної аномалії, див. (5.9), (5.10),

$$\int d^4x \langle \partial^\mu j_{\mu,L}^B - \partial^\mu j_{\mu,L_i}^L \rangle = 0. \quad (6.34)$$

Відповідно механізм Фуджікави не буде працювати і такі перетворення ферміонних полів не призведуть до зміни параметра $\bar{\theta}_{EW}$.

6.2 Поведінка сталих зв'язку при великих енергіях

Ще 1974 році було зроблено припущення, що група симетрії СМ $U_Y(1) \times SU_W(2) \times SU_C(3)$ є справедливою лише на відносно невеликому масштабі енергій, а на ранніх етапах розвитку Всесвіту (при більших енергіях, або температурах) фізика елементарних частинок могла описуватися більш високою групою симетрії, найпростішим варіантом якої є група $G = SU(5)$. Тоді при охолодженні Всесвіту симетрія групи G могла спонтанно порушитись до відомої симетрії СМ $U_Y(1) \times SU_W(2) \times SU_C(3)$. В цьому полягає основна ідея побудови теорії великого об'єднання GUT (*Grand Unification Theory*) [144–146].

Якщо в це повірити, то можна припустити, що в певній розширеній теорії СМ (наприклад, в $SU(5)$ моделі) відповідні сталі зв'язку збігаються в одну точку на певному, досить великому масштабі енергій і дорівнюватимуть одна одній при більших енергіях.

Вже в 1991 році, базуючись на теорії ренормалізаційної групи, були зроблені теоретичні передбачення поведінки трьох сталих зв'язку СМ

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{g'^2}{4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W}; \quad \alpha_2 = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W}; \quad \alpha_3 = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (6.35)$$

на великих масштабах енергій в рамках СМ [147], див. Рис. 22. Коефіцієнт $5/3$ у визначенні сталої α_1 пов'язаний з нормуванням генератора групи $U_1(Y)$ в теорії з загальною групою симетрії G , див. Розділ 7.9.

Як виявилось, на великих масштабах енергій $\mu \sim 10^{15}$ ГеВ значення сталих зв'язків дійсно наближаються одне до одного, хоча і не зустрічаються в одній точці [148, 149]. Сам факт досить близьких значень сталих зв'язку при великих енергіях в рамках СМ наптовхує на думку, що теорії великого об'єднання мають право на існування.

Найбільш популярними теоріями великого об'єднання є теорії, що засновані на групах $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 , див., наприклад, [150, 151].

Приклад теорії великого об'єднання, заснованої на групі $SU(5)$, буде розглянуто більш детально в Розділі 7.9.

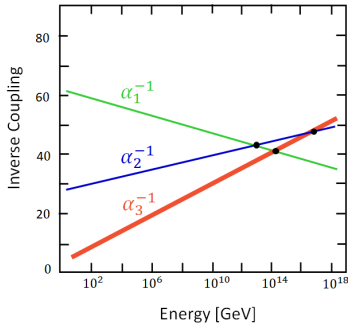


Рис. 22: Результат теоретичних розрахунків еволюції сталих зв'язку з ростом масштабу енергії в СМ. Зображення взято з [152].

6.3 Проблема ієрархії

СМ експериментально перевірена до енергій порядку 10 TeV. В межах СМ немає частинок важчих за t -кварк. Виникає питання, чи можуть бути важчі частинки у природі, або чи є масштаб інших взаємодій? З загальних міркувань відповідь є позитивною, бо СМ описує лише електрослабку, сильну та юкавівську взаємодію, але не включає в себе гравітаційну взаємодію.

На жаль, на даний час розроблена лише класична теорія гравітації. Побудова квантової теорії гравітації пов'язана з математичними проблемами. Той факт, що гравітаційна взаємодія є далекодіючою (як і електромагнітна взаємодія) призводить до висновку, що переносником гравітаційної взаємодії має бути безмасова¹ гіпотетична частинка (отримала назву *гравітон*). З того, що джерелом гравітації в рівняннях Ейнштейна є тензор другого порядку² (тензор енергії імпульсу) випливає, що гравітон повинен мати спин 2. Однак розрахунки в моделі квантованої гравітації показують зростання взаємодії при збільшенні енергії взаємодіючих частинок і призводять до розбіжностей відповідних інтегралів (до появи нескінченностей в розрахунках спостережуваних величин) при спробі врахувати обмін двома чи більшою

¹ Дані спостережень гравітаційних хвиль вказують, що швидкість їх розповсюдження є близькою до швидкості світла ($1 - v_g/c < 4 \cdot 10^{-19}$), що дає обмеження зверху на масу гравітона $m_g < 1.2 \cdot 10^{-22}$ еВ [153].

² Джерелом електромагнітного поля з рівнянь Максвелла є вектор струму. З цього випливає, що фотон є векторною частинкою зі спіном 1.

кількістю гравітонів [154]. Окрім математичних існують і фундаментальні проблеми. Справа в тому, що гравітаційне поле проявляє себе як кривизна простору-часу. Отже квантування гравітаційного поля призведе і до квантування простору-часу.

Незважаючи на наведені складнощі, з загальних міркувань можна знайти масштаб енергій (мас), коли будуть проявляти себе квантові властивості гравітаційного поля. Справді, в нову теорію має входити гравітаційна стала G , стала Планка $\hbar$ та швидкість світла c , як фундаментальні сталі квантової та релятивістської теорії. З зазначених сталих можна утворити наступну величину розмірності маси

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}, \quad (6.36)$$

що отримала назву *маси Планка*. Її чисельне значення дорівнює $M_P \approx 2.17647 \cdot 10^{-8}$ кг, або, в енергетичних одиницях,

$$M_P \approx 1.22091 \cdot 10^{19} \text{ GeV}. \quad (6.37)$$

В системі одиниць $\hbar = c = 1$ закон гравітаційного притягання Ньютона отримає вигляд

$$|\vec{F}_N| = \frac{1}{M_P^2} \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (6.38)$$

звідки відразу випливає, що в фізиці мікросвіту гравітаційна взаємодія елементарних частинок СМ є нехтовно малою в порівнянні з іншими видами взаємодії.

Проблема ієрархії пов'язана з принципово різними масштабами енергій (мас) в СМ та теорії квантової гравітації. Справді, характерним масштабом КХД є $\Lambda_{QCD} \sim 200$ МеВ, масштаб слабкої взаємодії визначається масами переносників взаємодії $M_W, M_Z \sim 100$ ГеВ. Вакуумне середнє поля Хіггса, що визначає юкавівську взаємодію частинок та забезпечує масу калібрувальних полів та полів матерії, є порядку $\nu \approx 250$ ГеВ. З іншого боку маси частинок СМ лежать в інтервалі від 0.5 МеВ (електрон) до 172 ГеВ (t -кварк). Як бачимо, всі наведені значення на багато порядків відрізняються від значення планківської маси. Згідно зі СМ в діапазоні енергій від 250 ГеВ до 10^{19} ГеВ відсутні нові частинки та нові взаємодії. Зазначений енергетичний проміжок отримав назву *великої пустелі*. Дуже дивним виглядає той факт, що на такій величезній енергетичній ділянці нічого немає!

6.4 Стабільність електрослабкого вакууму

Ефективний потенціал поля Хіггса

До цього моменту ми розглянули спонтанне порушення симетрії та механізм Хіггса в класичній теорії, або без врахування радіаційних поправок до потенціалу Хіггса. Саме врахування радіаційних поправок до потенціалу Хіггса дозволить нам в подальшому розглянути питання стабільності вакууму СМ [155, 156].

Розглянемо поки нейтральне скалярне поле, яке не взаємодіє з іншими полями. Квантові поправки до його потенціалу $U(\varphi)$ будуть надходити з петльових діаграм на Рис.23.

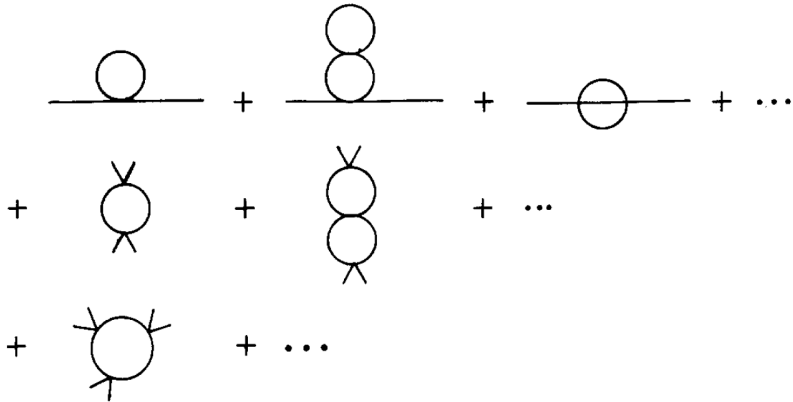


Рис. 23: Квантові поправки до класичного потенціалу скалярного поля зі взаємодією типу φ^4 . Рис. взято з [155].

Нескінченні доданки, що виникатимуть при розрахунку петльових діаграм, модифікують стартовий лагранжіан [157] скалярного поля та потенціал скалярного поля. Розрахунки в однопетльовому наближенні [155] показують, що

$$V(\varphi_c) = U(\varphi_c) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 + \frac{U''(\varphi_c)}{k^2} \right], \quad (6.39)$$

де $V(\varphi_c)$ – ефективний потенціал, $U(\varphi_c)$ – стартовий потенціал, φ_c – класичне скалярне поле (вакуумне середнє поля $\varphi_c = \langle 0|\varphi|0\rangle$). Наведений інтеграл є розбіжним, якщо його регуляризувати обрізанням та

покласти верхню межу інтегрування $k^2 = \Lambda^2$, отримаємо

$$V(\varphi_c) = U(\varphi_c) + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} U'' + \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{U''}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (6.40)$$

плюс константа, яку можна прибрати перевизначенням потенціалу.

Згідно з теоремою Боголюбова-Парасюка [157] нескінченні поправки від петльових діаграм (локальні контрчлени) додаються до стартового лагранжіану, модифікують коефіцієнти стартового лагранжіану та повинні повторювати структуру стартового лагранжіану. В нашому випадку, нескінченні поправки мають вигляд

$$\frac{\Lambda^2}{32\pi^2} U'' + \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \ln \frac{U''}{\Lambda^2}. \quad (6.41)$$

Тобто якщо стартовий потенціал містить доданки у вигляді поліному до φ^4 включно, то U'' також буде містити поліном максимального ступеня φ^4 . Якщо ж стартовий потенціал міститиме доданки у вигляді поліному вище 4 ступеня, то така теорія буде неперенормовною.

Для потенціалу типу (3.10) ми отримаємо такий вираз для ефективного потенціалу

$$\begin{aligned} V(\varphi_c) &= \frac{m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} (m^2 + 3\lambda \varphi_c^2) + \\ &\quad + \frac{(m^2 + 3\lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m^2 + 3\lambda \varphi_c^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{(m^2 + 3\lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda \varphi_c^2}{\Lambda^2} + a\varphi_c^2 + b\varphi_c^4, \end{aligned} \quad (6.42)$$

де коефіцієнти a, b є нескінченними та містять в собі нескінченний параметр Λ . Коефіцієнти a, b модифікують величини m^2, λ в результаті застосування процедури перенормування. Процедуру перенормування можна провести декількома способами.

Перший підхід. Ідея полягає в тому, що стартові параметри лагранжіану m, λ є не фізичними. Радіаційні нескінченні петльові поправки, додані до потенціалу, перетворюють стартові параметри на фізичні параметри лагранжіану m_R, λ_R .

Фізичне значення масового параметра за визначенням є

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = m_R^2. \quad (6.43)$$

Фізичне значення параметра самодії є

$$\left. \frac{\partial^4 V}{\partial \varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0} = 6\lambda_R^2. \quad (6.44)$$

Явні вирази (6.43), (6.44) для потенціалу (6.42) є досить складними, але вони нам не потрібні. Ми шукатимемо додатковий мінімум поля Хіггса, який може себе проявити при дуже великих значеннях поля φ_c . В цьому випадку домінуючим буде доданок з φ_c^4 і можна одразу покласти $m = 0$. Тому розглянемо ефективний потенціал для безмасової теорії скалярного поля у вигляді

$$V(\varphi_c) = \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{9\lambda^2 \varphi_c^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\Lambda^2} + a\varphi_c^2 + b\varphi_c^4. \quad (6.45)$$

Тоді

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = 2a = 0. \quad (6.46)$$

Оскільки $\frac{\partial^4 V}{\partial \varphi_c^4}$ в точці $\varphi_c = 0$ дорівнює нескінченності, параметр самодії визначимо в іншій точці, наприклад в $\varphi_c = M$ (M – довільна величина розмірності маси)

$$\left. \frac{\partial^4 V}{\partial \varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=M} = 6\lambda_R^2 = 6\lambda + 24b + \frac{9\lambda^2}{64\pi^2} \left(100 + 24 \ln \frac{M^2}{\Lambda^2} \right). \quad (6.47)$$

Підставивши $a = 0$ та b з (6.47) у ефективний потенціал (6.45), отримаємо

$$V(\varphi_c) = \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{9\lambda^2 \varphi_c^4}{64\pi^2} \left(\ln \left[\frac{\varphi_c^2}{M^2} \right] - \frac{25}{6} \right). \quad (6.48)$$

Як бачимо, отримали вираз, у який входять нефізичний параметр стартового лагранжіану λ та фізичний параметр λ_R , що вимірюється при значенні $\varphi_c = M$. Щоб уникнути цього, використаємо наступний прийом. Припустимо, що ми виразили фізичний параметр λ_R через ряд по λ . Тоді в першому порядку по сталій λ матимемо $\lambda_R = \lambda + O(\lambda^2)$. Підвівши останній вираз до квадрату отримаємо зв'язок в другому порядку $\lambda_R^2 = \lambda^2 + O(\lambda^3)$. Використавши це, ми можемо переписати ефективний потенціал (6.48) лише через λ_R , див.

також [158]:

$$V(\varphi_c) = \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{9\lambda_R^2 \varphi_c^4}{64\pi^2} \left(\ln \left[\frac{\varphi_c^2}{M^2} \right] - \frac{25}{6} \right). \quad (6.49)$$

Звідки випливає існування екстремуму потенціалу, $\partial V(\varphi_c)/\partial \varphi_c = 0$, у ще одній точці, окрім $\varphi_c = 0$.

Другий підхід. Ідея підходу полягає в тому, що ми записуємо лагранжіан через фізичні параметри m_R , λ_R , які беруться експериментально на певному масштабі енергій μ . При цьому до лагранжіану штучно додають контрчлени, що відтворюють структуру лагранжіану. Їх мета залишити незмінними значення m_R , λ_R від впливу радіаційних поправок. Отже, запишемо потенціал з радіаційними поправками у вигляді [156]

$$V(\varphi_c) = \frac{m_R^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} (m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2) + \frac{(m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\delta m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\delta \lambda}{4} \varphi_c^4 + \delta \Omega. \quad (6.50)$$

Накладемо умову, щоб в точці $m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2 = \mu^2$ даний потенціал мав вигляд класичний вигляд без радіаційних поправок

$$V(\varphi_c) = \frac{m_R^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4. \quad (6.51)$$

Тоді перенормований потенціал на довільному масштабі не має містити нескінченний параметр регуляризації Λ та має зводитися до виразу (6.51) при $m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2 = \mu^2$. Не складно вгадати його вигляд

$$V(\varphi_c) = \frac{m_R^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \varphi_c^4 + \frac{(m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m_R^2 + 3\lambda_R \varphi_c^2}{\mu^2}. \quad (6.52)$$

Отже, фізичний потенціал має задовільняти умовам

$$V(\varphi_c)|_{\varphi_c=0} = \frac{m_R^4}{64\pi^2} \ln \frac{m_R^2}{\mu^2}, \quad (6.53)$$

$$\left. \frac{d^2 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = m_R^2 + 12\lambda_R m_R^2 \frac{\ln \frac{m_R^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}}{64\pi^2}, \quad (6.54)$$

$$\left. \frac{d^4 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0} = 6\lambda_R + 108\lambda_R^2 \frac{3 + 2 \ln \frac{m_R^2}{\mu^2}}{64\pi^2}. \quad (6.55)$$

Наступним кроком потрібно знайти значення $V(\varphi_c)|_{\varphi_c=0}$, а також $\left. \frac{d^2 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0}$ та $\left. \frac{d^4 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0}$ для потенціалу (6.50), прирівняти отримані вирази до (6.53) – (6.55) та розв'язати отриману систему рівнянь відносно δm , $\delta \lambda$ та $\delta \Omega$. Підставивши отримані значення δm , $\delta \lambda$ та $\delta \Omega$ в потенціал (6.50) можна переконатися, що ми справді отримуємо потенціал у вигляді (6.52).

Узагальнення за наявності додаткових полів

За наявності в лагранжіані додаткових полів, що взаємодіють зі скалярним полем Хіггса, петльові діаграми, які визначатимуть ефективний потенціал скалярного поля Хіггса, будуть також містити лінії додаткових полів. Відповідно, наявність додаткових полів у лагранжіані змінюватиме ефективний потенціал поля Хіггса.

Розглянемо ситуацію, коли існує декілька скалярних полів, але лише одне з них має ненульове вакуумне середнє. Потенціал скалярних полів запишемо як

$$V(|\phi|^2) = -\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda [\Phi^+ \Phi]^2 = -\frac{\mu^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_N^2) + \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_N^2)^2, \quad (6.56)$$

де $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$.

Радіаційні поправки до даного потенціалу визначаються (6.40) з діагональними другими похідними $U''_{\varphi_i, \varphi_i}$, де треба провести підсумовування за всіма скалярними полями, а другі похідні беруться в точці $\Phi_C = (0, 0, \dots, \varphi_c)$ [68, 155, 156, 159]. Оскільки

$$U''_{\varphi_N, \varphi_N} |_{\Phi_c} = -\mu^2 + 3\lambda \varphi_c^2, \quad U''_{\varphi_i, \varphi_i} |_{\Phi_c} = -\mu^2 + \lambda \varphi_c^2, \quad i \neq N, \quad (6.57)$$

тому радіаційна поправка до потенціалу (після перенормування) від скалярних полів матиме вигляд, див. (6.52),

$$V_{scal} = \frac{(m^2 + 3\lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda \varphi_c^2}{\mu^2} + (N-1) \frac{(m^2 + \lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + \lambda \varphi_c^2}{\mu^2}. \quad (6.58)$$

Поправка до ефективного потенціалу від внеску векторних полів з масою $m_V = g_v \varphi_c$ [156]:

$$V_{vec} = \frac{3(g_v \varphi_c)^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (6.59)$$

де фактор 3 з'явився в результаті згортки $g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu} - k_\nu k_\mu/k^2)$. Безмасові векторні поля не дають внеску в ефективний потенціал.

Поправка до ефективного потенціалу від внеску ферміонних полів з масою $m_f = g_f \varphi_c$ буде від'ємною, оскільки петля з ферміонних ліній має додатковий знак мінус у порівнянні з петлею з бозонних ліній:

$$V_{ferm} = -\frac{4(g_f \varphi_c)^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (6.60)$$

де 4 виникла внаслідок згортки одиничної матриці 4×4 з простору γ матриць.

Таким чином, врахувавши всі можливі поправки до ефективного потенціалу поля Хіггса, отримаємо [156]

$$\begin{aligned} V_{eff} = & \frac{m^2}{2} \phi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 + \frac{B \varphi_c^4}{64\pi^2} \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} + \frac{(m^2 + 3\lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda \varphi_c^2}{\mu^2} \\ & + (N - 1) \frac{(m^2 + \lambda \varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + \lambda \varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (6.61) \end{aligned}$$

де $B = 3 \sum_v g_v^2 - 4 \sum_f g_f^2$.

Ефективний потенціал поля Хіггса в СМ

Запишемо ефективний потенціал скалярного поля Хіггса для випадку Стандартної моделі. В СМ присутні 4 скалярні поля (масивне поле Хіггса h , та три безмасові голдстоунівські бозони φ^+ , φ^- , φ_z), тобто $N = 4$. В СМ присутні одне безмасове векторне поле (фотони) – не дає внеску в ефективний потенціал, та три масивні векторні поля: поле W^- та W^+ бозонів з масою $M_W = gv/2$ та сталою $g_W = g/2$, поле Z бозонів з масою $M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}v/2$ та сталою $g_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}/2$. В СМ присутні ферміонні поля матерії, але їх внесок пропорційний g_f^4 , де $g_f = m_g/v$. Оскільки залежність 4-го ступеня, то можна врахувати лише внесок найважчого ферміона, тобто top кварка. Оскільки маса top кварка $m_t = Y_t v/\sqrt{2}$, то $g_t = Y_t/\sqrt{2}$, де Y_t – юкавівська стала для

top кварка. Внаслідок того, що *top* кварк може мати три можливих кольори, це дає додатковий множник 3.

Врахувавши все сказане, можна записати ефективний потенціал скалярного поля Хігса для випадку СМ у вигляді [155, 156]:

$$V_{eff}^{SM} = \frac{m^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi_c^4 + 3\frac{2g^4 + (g^2 + g'^2)^2}{1024\pi^2}\varphi_c^4 \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} - 3\frac{Y_t^4}{64\pi^2}\varphi_c^4 \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} + \frac{(m^2 + 3\lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + 3\lambda\varphi_c^2}{\mu^2} + 3\frac{(m^2 + \lambda\varphi_c^2)^2}{64\pi^2} \ln \frac{m^2 + \lambda\varphi_c^2}{\mu^2}, \quad (6.62)$$

Покращений запис ефективного потенціалу поля Хігса методом теорії ренормгрупи

Як буде показано далі, ефективний потенціал може мати другий мінімум при дуже великих значеннях скалярного поля φ_c . Для цього треба враховувати вищі порядки теорії збурень та враховувати діаграми з більшою кількістю петель. Внесок від n -петльової діаграми пропорційний $g_i^{n+1} \ln^n \frac{\varphi_c^2}{\mu^2}$, де μ – масштаб енергій, на якому розглядається ефективний потенціал, g_i – сталі зв'язку лагранжіану. Відповідно для застосовності теорії збурень вимагається не лише малість сталих зв'язку $g_i < 1$, а й малість величини $g_i \ln \frac{\varphi_c^2}{\mu^2} < 1$. Для будь-якого фіксованого значення φ_c можна обрати значення μ , для якого ці умови виконуються. Але для того, щоб проаналізувати теорію на проміжку значень полів від $\varphi_{c,1}$ до $\varphi_{c,2}$ має виконуватися умова $g_i \ln \frac{\varphi_{c,2}^2}{\varphi_{c,1}^2} < 1$, що не виконуватиметься для нашої задачі.

Коректний підхід до запису ефективного потенціалу на великих масштабах полів (енергій) базується на застосуванні ренормалізаційної групи [156, 160].

Ідея підходу ренормалізаційної групи полягає в тому, що повна функція ефективного потенціалу не має змінюватися при зміні масштабу енергій μ :

$$\frac{dV}{d\mu} = 0, \quad (6.63)$$

що призводить до рівняння Каллана-Сіманчика

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} + m^2 \gamma_m \frac{\partial}{\partial m^2} + \varphi_c \gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_c} \right) V_{eff} = 0, \quad (6.64)$$

де

$$\beta_{g_i} = \mu \frac{dg_i(\mu)}{d\mu}, \quad \gamma_{\varphi_c}(\mu) = \mu \frac{d\varphi_c(\mu)}{d\mu}, \quad \gamma_m m^2(\mu) = \mu \frac{dm^2(\mu)}{d\mu}. \quad (6.65)$$

Диференційні рівняння ренормалізаційної групи є абсолютно точними. Відповідно, знаючи значення величин β , γ_m , γ і значення ефективного потенціалу в точці $\varphi_{c,1}$ можна знайти точне значення ефективного потенціалу в будь-якій точці $\varphi_{c,2}$. На практиці ж значення величин β , γ_m , γ відомі у вигляді перших доданків ряду за сталою зв'язку g_i і, відповідно, розв'язок рівняння Каллана-Сіманчика буде наближеним, але умовою його застосування буде $g_i < 1$, а не $g_i \ln \frac{\varphi_{c,2}^2}{\varphi_{c,1}^2} < 1$, що значно розширює масштаб енергій, на яку можна використовувати покращений ефективний потенціал скалярного поля.

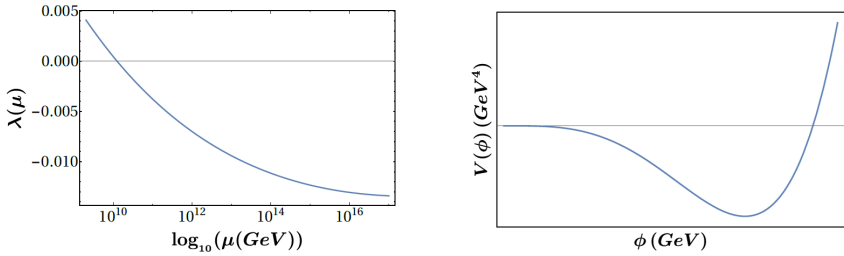


Рис. 24: На лівому малюнку схематично продемонстровано поведінку сталої взаємодії λ . Показано, що при $\mu \sim 10^{11}$ GeV стала λ стає від'ємною. На правому рисунку схематично показано поведінку ефективного потенціалу поля Хіггса та наявність другого мінімуму в точці $\varphi_c \sim 10^{30}$ GeV. Рис. взято з [156].

Використавши відомі функції β , γ_m , γ та розв'язавши рівняння Каллана-Сіманчика отримуємо

$$V_{eff}^{SM} = \frac{m^2(t)}{2} G^2(t) \varphi_c^2 + \frac{\lambda(t)}{4} G^4(t) \varphi_c^4, \quad (6.66)$$

де $t = \ln(\varphi_c/\mu)$, а $m(t)$, $\lambda(t)$ та $G(t)$ – відомі функції, що отримуються чисельними розрахунками [156]. Результатом розрахунків є те, що при масштабі $\mu \sim 10^{11}$ GeV параметр λ стає від'ємним, а ефективний потенціал Хіггса отримує другий мінімум при $\varphi_c \sim 10^{30}$ GeV, див. Рис.24.

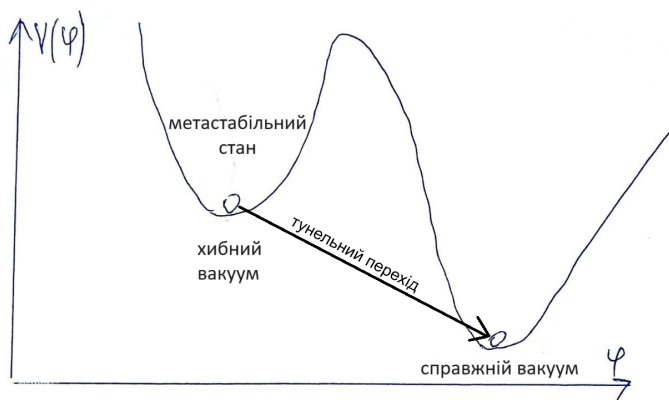


Рис. 25: Ілюстрація положення хибного та справжнього вакууму для схематичного потенціалу поля Хіггса.

Відповідно, надзвичайно важливим стає питання стабільності вакууму відносно другого мінімуму потенціалу поля Хіггса. Справа в тому, що якщо відомий нам мінімум потенціалу поля Хіггса в околі точки $\varphi_c = 246$ GeV не такий глибокий, як мінімум в околі точки $\varphi_c = 10^{30}$ GeV, то за рахунок тунельного ефекту з часом система перейде в стан більш глибокого мінімуму потенціалу. В цьому випадку стан системи в околі точки мінімуму $\varphi_c = 246$ GeV називається *метастабільним станом*, а відповідний вакуумний стан називається *хибним вакуумом*. Вакуумний же стан в точці більш глибокого мінімуму в околі точки $\varphi_c = 10^{30}$ GeV називається *справжнім вакуумом*, див. Рис.25. Перехід зі стану хибного вакууму у стан справжнього вакууму називається розпадом хибного вакууму. Ширина розпаду визначається як $\Gamma = Ae^{-B}$, де A, B були розраховані в [161, 162]. Процес розпаду хибного вакууму відбувається через механізм зародження бульбашок зі справжнім вакуумом за рахунок інстантонних ефектів. Якщо радіус такої бульбашки стане більшим за певний критичний радіус, вона вибухово почне зростати в розмірах зі швидкістю світла, якщо ж радіус буде меншим за критичний радіус, то така бульбашка буде зменшуватися та зникне [163–166]. Оскільки маси ферміонних полів, бозонів слабкої взаємодії, поля Хіггса, а також стала Фермі та

юкавівська взаємодія визначаються вакуумним середнім поля Хіггса, то перехід поля Хіггса в нову точку мінімуму потенціалу матиме величезний вплив для нашого Всесвіту.

Відповідно, ключовими є наступні питання. Якого типу вакуум, хибний чи справжній, визначає потенціал Хіггса в околі точки *електрослабкого мінімуму* $\varphi_c = 246$ Гев? Якщо стан вакууму поля Хіггса в околі точки $\varphi_c = 246$ Гев є метастабільним, то яким буде час його розпаду?

Стабільність електрослабкого вакууму поля Хіггса в СМ

Як виявилось, відповідь на питання стабільності вакууму поля Хіггса в СМ дуже чутлива до точних значень маси бозона Хіггса m_H та маси t -кварка m_t .

В залежності від значення потенціалу Хіггса в точці другого мінімуму $V_{eff}(\varphi_{min})$ З самих загальних міркувань розрізняють три можливі області параметрів в площині (m_H, m_t) :

- Мінімум потенціалу поля Хіггса в точці $\nu = 246$ Гев є глибшим в порівнянні зі значенням в точці другого мінімуму $V_{eff}(\varphi_{min}) > V_{eff}(\nu)$. Цей випадок називають *областю абсолютної стабільності*.
- Мінімум потенціалу поля Хіггса в точці другого мінімуму є глибшим в порівнянні зі значенням потенціалу в точці $\nu = 246$ Гев $V_{eff}(\varphi_{min}) < V_{eff}(\nu)$. Час перебування в стані з мінімумом в точці $\nu = 246$ Гев є більшим за час життя Всівіту $\tau > T_U$. Цей випадок називають *областю метастабільного стану*.
- Мінімум потенціалу поля Хіггса в точці другого мінімуму є глибшим в порівнянні зі значенням потенціалу в точці $\nu = 246$ Гев $V_{eff}(\varphi_{min}) < V_{eff}(\nu)$. Час перебування в стані з мінімумом в точці $\nu = 246$ Гев є меншим за час життя Всівіту $\tau < T_U$. Цей випадок називають *областю нестабільності*.

Результат аналізу стабільності вакууму поля Хіггса в околі точки електрослабкого мінімуму $\nu = 246$ Гев представлений в [167] та на Рис.26. Лінія між областями стабільності та метастабільності визначається умовою $V_{eff}(\varphi_{min}) = V_{eff}(\nu)$. Лінія між областями нестабільності та метастабільності визначається умовою $\tau = T_U$. Відомі на час

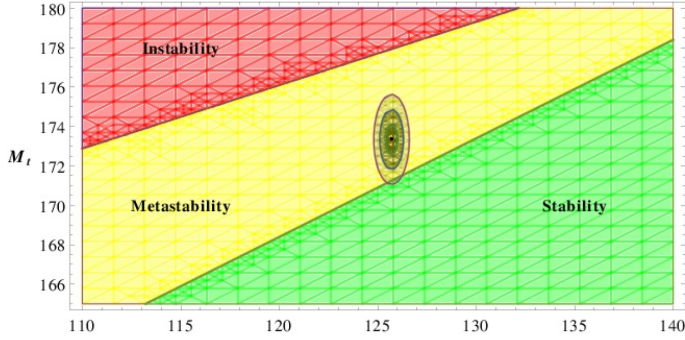


Рис. 26: Области стабільності вакууму поля Хіггса в околі точки електрослабкого мінімуму $\nu = 246$ GeV [167] в площині (m_H, m_t) . Відомі на час значення (m_H, m_t) вказують на те, що вакуум поля Хіггса знаходиться в метастабільному стані ближче до області абсолютної стабільності.

значення (m_H, m_t) , а саме

$$m_H^{exp} = 125.7 \pm 0.25 \text{ GeV}, \quad m_t^{exp} = 173.34 \pm 1.3 \text{ GeV}$$

вказують на те, що вакуум поля Хіггса знаходиться в метастабільному стані ближче до області абсолютної стабільності.

Отриманий результат був отриманий без врахування гравітаційних ефектів у Всесвіті. Врахування гравітаційної взаємодії має стабілізаційний ефект, що призводить до збільшення часу життя Всесвіту. Зокрема, розрахунок часу життя електрослабкого вакууму в СМ у плоскому просторі-часі (без урахування гравітаційних ефектів) дає $\tau = e^{639} T_U$. Розрахунок часу життя з урахуванням гравітаційних ефектів дає $\tau = e^{661} T_U$ [156].

Величезне значення часу життя електрослабкого вакууму в рамках СМ звичайно не може не радувати. З іншої точки зору слід звернути увагу на дивовижно гарні значення спостережуваних параметрів (тут має місце тонке налаштування, fine-tuning) (m_H, m_t) , оскільки незначне відхилення від існуючого значення могло б привести до того, що Всесвіт у нинішньому стані не зміг би довго існувати. Аби перехід вакууму з хибного (електрослабкого) стану в справжній стан

справді б відбувся, це б призвело до величезного вивільнення енергії у Всесвіті (справжній вакуумний стан має нижчу енергію) та до зміни значення мас всіх елементарних частинок! Це б мало катастрофічне значення для нашого існування.

Вплив нової фізики на стабільність електрослабкого вакууму поля Хіггса

По-перше, з аналізу Рис.26 та формули (6.62) випливає, що аби існувала ферміонна частинка з масою більшою за масу t -кварка (наприклад, новий лептонний та кварковий дублет, щоб не суперечити вимозі скорочення кіральної аномалії в СМ), а маса бозона Хіггса залишалася б сталою, то точка на діаграмі (m_H, m_t) піднялася б угору в область нестабільності. Тобто навіть незначна зміна лагранжіану СМ насправді сильно впливає на положення точки на діаграмі (m_H, m_t) та на час життя електрослабкого вакууму.

По-друге, на час електрослабкого вакууму також впливатиме нова фізика на великих масштабах. Розглянемо це детальніше.

Вплив операторів вищих розмірностей

Як вже зазначалося, при великих енергіях (великих значеннях поля Хіггса), квадратичним доданком поля Хіггса можна знехтувати і потенціал набуває простого вигляду

$$V_{SM}(\varphi) = \frac{\lambda_{SM}(\varphi)}{4} \varphi^4. \quad (6.67)$$

За рахунок врахування радіаційних поправок та розв'язку рівняння ренормалізаційної групи параметр самої λ залежить від масштабу енергій та набуває вигляду [168]:

$$\lambda_{SM}(\varphi) = \lambda_* + \alpha \left(\ln \frac{\varphi}{M_{Pl}} \right)^2 + \beta \left(\ln \frac{\varphi}{M_{Pl}} \right)^4, \quad (6.68)$$

де $M_P = \sqrt{\hbar c/G} = 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ – маса Планка, $\lambda_* = -0.013$, $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 6.3 \cdot 10^{-8}$. Потенціал (6.67) веде себе так як предствлено на Рис.24 та перетинає нуль в точках $\varphi = 7.7 \cdot 10^{10} \text{ GeV}$ та $\varphi = 1.9 \cdot 10^{27} \text{ GeV}$. Саме для такого потенціалу були побудовані області стабільності електрослабкого вакууму на Рис.26.

Припустимо тепер, що існує нова фізика на великих масштабах енергій, а саме: існують нові важкі частинки, що взаємодіють з полем

Хіггса. Тоді їх ефективна взаємодія буде схожа на 4-ферміонну взаємодію Фермі, але в нашому випадку характерним масштабом взаємодії можна обрати масштаб Планка. В результаті нашого припущення ми отримаємо додаткові оператори розмірності 6 та 8:

$$V_{NP}(\varphi) = \frac{\lambda_6}{6} \frac{\varphi^6}{M_P^2} + \frac{\lambda_8}{8} \frac{\varphi^8}{M_P^4}. \quad (6.69)$$

Очевидно, що у випадку, коли $\lambda_6 < 0$ та $\lambda_8 > 0$ вплив ефективного потенціалу буде призводити до зменшення часу життя електрослабкого вакууму.

В результаті ефективний потенціал набуде вигляду

$$V_{eff} = V_{SM} + V_{NP}(\varphi) = \frac{\varphi^4}{4} \left[\lambda_* + \alpha \ln^2 \frac{\varphi}{M_{Pl}} + \beta \ln^4 \frac{\varphi}{M_{Pl}} + \frac{2}{3} \lambda_6 \frac{\varphi^2}{M_P^2} + \frac{1}{2} \lambda_8 \frac{\varphi^4}{M_P^4} \right]. \quad (6.70)$$

Звичайно, значення параметрів λ_6 та λ_8 є невідомими, але виявляється, що час життя електрослабкого вакууму є дуже чутливим до числових значень цих параметрів ефективного потенціалу, див. Рис.27. Як можна побачити з таблиці, вплив гравітації завжди збільшує час життя електрослабкого вакууму, однак існують області значень $\lambda_6 < 0$ та $\lambda_8 > 0$, коли час життя вакууму навіть з урахуванням гравітаційних ефектів є настільки малим, що суперчить спостережуваним даним. Нагадаємо, що час життя Всесвіту $T_U \approx 13.8$ мільярдів років $\approx 4.35 \cdot 10^{17}$ секунди.

Вплив нових важких частинок на стабільність вакууму

В якості прикладу нової фізики на великих масштабах наводять додатковий (модельний) до СМ лагранжіан з новими скалярним та ферміонним полями з масами порядку маси Планка, що взаємодіють з полем Хіггса [169]:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} = & \frac{M_S^2}{2} S^2 + \frac{\lambda_S}{4} S^4 + 2g_S (H^\dagger \cdot H) S^2 \\ & + M_f (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) + \sqrt{2}g_f (\bar{\Psi}_L \cdot H \psi_R + \bar{\psi}_R H^\dagger \cdot \Psi_L), \end{aligned} \quad (6.71)$$

де H – дублет поля Хіггса, λ_S – стала взаємодії нового скалярного поля S , g_S – стала зв'язку між дублетом поля Хіггса та скаляром

λ_6	λ_8	τ_{flat}/T_U	τ_{grav}/T_U
0	0	10^{639}	10^{661}
-0.05	0.1	10^{446}	10^{653}
-0.1	0.2	10^{317}	10^{598}
-0.15	0.25	10^{186}	10^{512}
-0.3	0.3	10^{-52}	10^{287}
-0.45	0.5	10^{-93}	10^{173}
-0.7	0.6	10^{-162}	10^{47}
-1.2	1.0	10^{-195}	10^{-58}
-1.7	1.5	10^{-206}	10^{-106}
-2.0	2.1	10^{-206}	10^{-121}

Рис. 27: Час життя електрослабкого вакууму в залежності від значень параметрів ефективного потенціалу λ_6 та λ_8 , що генеруються новою фізикою на великому масштабі енергій [156].

S , ψ – синглетне ферміонне поле з масою M_f , Ψ_L – компонента з лівою кіральністю $SU(2)$ ферміонного дублета, g_f – юкавівська стала зв'язку між полем ферміонного дублета Ψ та полем Хігса H .

В цьому випадку однопетльова поправка до ефективного потенціалу поля Хігса матиме вигляд

$$\begin{aligned}
V_1(\phi) = & \frac{(M_S^2 + 2g_S\phi^2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M_S^2 + 2g_S\phi^2}{M_S^2} \right) - \frac{3}{2} \right] \\
& - \frac{(M_f^2 + g_f^2\phi^2)^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M_f^2 + g_f^2\phi^2}{M_S^2} \right) - \frac{3}{2} \right], \quad (6.72)
\end{aligned}$$

де перенормування відбувається на масштабі $\mu = M_S$. Звертаємо увагу, що внесок від скалярного поля позитивний і має збільшувати час життя електрослабкого вакууму, а внесок від ферміонного поля призводить до зменшення часу життя електрослабкого вакууму.

Якщо параметри додаткового лагранжіану обрати у вигляді $M_S = 1.2 \cdot 10^{18}$ ГеВ, $M_f = 0.6 \cdot 10^{17}$ ГеВ, $g_S(M_S) = 0.97$, $g_f^2(M_S) = 0.48$, $\lambda_{SM}(M_S) = -0.0151$, то ефективний потенціал поля Хігса матиме

новий мінімум (нижче за електрослабкий мінімум) в точці $\phi_{min} \sim 0.4 \cdot 10^{19}$ ГеВ. Час життя електрослабкого вакууму в цьому випадку буде $\tau \sim 10^{180} T_U$.

Якщо ж в попередньому прикладі всі параметри залишити без змін, а лише змінити масу ферміона $M_f = 2.4 \cdot 10^{15}$ ГеВ, то отримаємо час життя електрослабкого вакууму $\tau \sim 10^{-65} T_U$, що звичайно суперечить даним спостережень.

Як бачимо час життя електрослабкого вакууму є дуже чутливим до нової фізики на різних енергетичних масштабах.

Вплив взаємодії поля Хіггса з кривиною простору-часу на стабільність вакууму

В загальному випадку можна несуперечливим чином ввести взаємодію скалярного поля з кривиною простору-часу [170, 171]. Лагранжіан скалярного поля, що взаємодіє з кривиною простору-часу матиме вигляд

$$\mathcal{L} = D^\mu \Psi^\dagger D_\mu \Psi - (m^2 + \xi R) \Psi^\dagger \Psi,$$

генерує рівняння руху

$$\{D_\mu D^\mu + (m^2 + \xi R(\mathbf{x}))\} \psi_\lambda(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.73)$$

та визначає тензор енергії-імпульсу у вигляді

$$T^{\mu\nu} = (D^\mu \Psi)^\dagger D^\nu \Psi + (D^\nu \Psi)^\dagger D^\mu \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \xi (g^{\mu\nu} D^\rho D_\rho - D^\mu D^\nu - R^{\mu\nu}) \Psi^\dagger \Psi, \quad (6.74)$$

де $R^{\mu\nu}$ – тензор Річчі, $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ – скалярна кривина простору-часу, ξ – стала зв'язку скалярного поля з кривиною простору-часу.

Цікавим є те, що якщо у виразі для тензора енергії-імпульсу покласти $R = 0$ (випадок плоского простору-часу), то залежність густини енергії скалярного поля (компонента T^{00}) від параметра ξ залишиться. Тобто для випадку плоского простору часу ξ виступає певним довільним параметром, що може змінювати густину енергії скалярного поля! Єдиним виділенням з фізичної точки зору випадком є значення $\xi_c = (d-1)/(4d)$, де d – просторова розмірність. В цьому випадку модель скалярного поля є конформно інваріантною. Для нашого випадку $(3+1)$ -вимірний простору-часу $d = 3$, отже $\xi_c = 1/6$.

Розглянемо вплив сталої зв'язку скалярного поля з кривиною простору-часу на час життя електрослабкого вакууму [172]. Виявляється,

що в рамках СМ додавання до лагранжіану доданку $-\xi H^+ H$ практично не впливає на час життя електрослабкого вакууму, але цей доданок має величезне стабілізуюче значення у випадку модифікації лагранжіану СМ.

Наприклад, при додаванні до ефективного потенціалу поля Хіггса операторів вищої розмірності (6.70) з параметрами $\lambda_6 = -1.2$, $\lambda_8 = 1$ матимемо, згідно з Рис.27, надзвичайно малий час життя електрослабкого вакууму $\tau = 10^{-58} T_U$. Якщо ж до даної моделі додати в лагранжіан доданок $-\xi H^+ H$, отримаємо час життя електрослабкого вакууму в залежності від значення параметра ξ , що представлений на Рис.28. Як можна побачити, при $|\xi| > 1$ час життя електрослабкого вакууму стабілізується і приблизно відповідає часу життя, що розраховується в рамках СМ.

ξ	τ_{SM}	τ_{NP}
-15	10^{736}	10^{736}
-10	10^{726}	10^{726}
-5	10^{710}	10^{710}
-1	10^{684}	10^{680}
-0.5	10^{677}	10^{600}
-0.3	10^{672}	10^{358}
-0.1	10^{666}	10^{65}
0	10^{661}	10^{-58}

ξ	τ_{SM}	τ_{NP}
0.3	10^{660}	10^{-167}
0.5	10^{668}	10^{23}
0.7	10^{674}	10^{346}
0.8	10^{676}	10^{512}
1	10^{679}	10^{666}
5	10^{709}	10^{709}
10	10^{725}	10^{725}
15	10^{735}	10^{735}

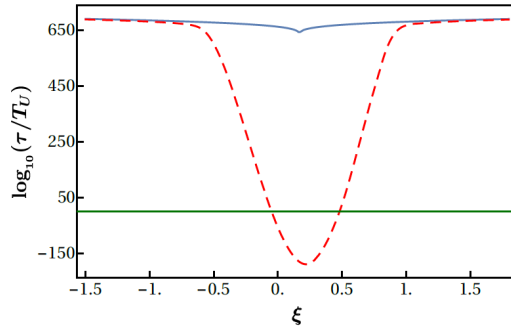


Рис. 28: Час життя електрослабкого вакууму для значень параметрів ефективного потенціалу $\lambda_6 = -1.2$ та $\lambda_8 = 1$, що генеруються новою фізикою на великому масштабі енергій, в залежності від значення стала зв'язку скалярного поля з кривиною простору-часу. На нижньому малюнку горизонтальна лінія визначає значення при якому $\tau = T_U$. Рис. взято з [156].

РОЗДІЛ 7

Варіанти розширення СМ. Можливі взаємодії частинок нової фізики з частинками СМ

Вступ

Наведені вище проблеми СМ вказують на те, що СМ є неповною теорією і має бути розширена. Найбільш ймовірно, що окрім відомих частинок СМ існує так званий "прихований" сектор СМ з однією або багатьма частинками, що поки не піддаються експериментальному спостереженню.

На питання "Чому ми частинки нової фізики не спостерігаємо в експерименті?" є дві можливі відповіді, див. Рис. 29. Частинки нової фізики можуть бути важкими (з масами, що суттєво перевищують енергії зіткнення частинок в сучасних прискорювачах) та мати не дуже малі значення сталих зв'язку з частинками СМ. В цьому випадку, зазначені частинки не можуть бути народжені на існуючих прискорювачах, а для того, щоб їх безпосередньо спостерігати та шукати їх прояви, потрібно створювати все більш і більш потужні прискорювачі. Такі експерименти при великих енергіях зіткнень частинок отримали назву *energy frontier experiments*. Але потрібно розуміти, що можливості людства в такому напрямку досліджень є обмеженими. Справді, на Великому Адронному Колайдері енергія зіткнень протонів становить близько 14 TeV, а майбутній (орієнтовно 2070 рік) більш потужний прискорювач ("Майбутній кільцевий колайдер"— Future Circular Collider) матиме енергію протонних зіткнень лише порядку 100 TeV. При цьому маса частинок нової фізики може бути як завгодно великою і обмежена лише планківськими масштабами.

Інша відповідь на поставлене питання полягає в тому, що частинки нової фізики можуть бути достатньо легкими (їх можна утворювати

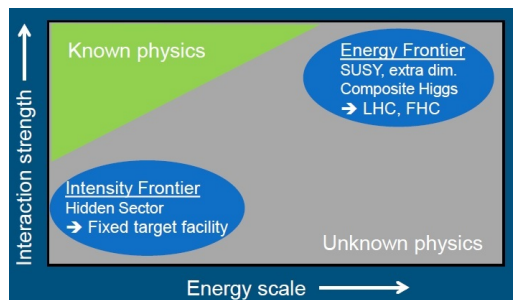


Рис. 29: Можливі області параметрів частинок фізики за межами Стандартної Моделі. По горизонтальній вісі відкладені значення мас нових частинок, а по вертикальній вісі – їх сталі зв'язку взаємодії з частинками СМ. Зелений області відповідають частинки СМ.

на сучасних прискорювачах) та надзвичайно слабо взаємодіяти з частинками СМ. В цьому випадку, відповідні реакції за участю нових частинок відбуватимуться дуже рідко (саме тому вони досі і не спостерігалися в експериментах). Важливим є те, що пошук таких нових частинок можна проводити вже зараз. Для цього потрібні експерименти з великою кількістю подій та низьким рівнем фону. Вони отримали назву *intensity frontier experiments*. Саме на розгляді цього випадку ми і зосередимо увагу в подальшому.

В природі може бути реалізований і третій, найгірший для нас, сценарій. Якщо частинки (або деякі з частинок) нової фізики є важкими (з масами більшими за 100 TeV) та мають дуже малі значення сталих зв'язку взаємодії з частинками СМ, то знайти їх прояви в колайдерних експериментах у найближчому майбутньому буде неможливо. Цьому сценарію відповідає область параметрів у правому нижньому куту на Рис. (29).

Незважаючи на те, що існує багато різних теоретичних моделей розширення СМ, існує всього декілька варіантів запису можливих виглядів взаємодії частинок СМ з частинками нової фізики, що матимуть калібрувальну інваріантність, лоренц-інваріантність та будуть перенормовними, див. оглядові роботи [173, 174].

Нагадаємо, див. наприклад [175], що необхідною умовою перенормованої теорії є умова не від'ємної розмірності сталої взаємодії $[g] =$

$[m]^n$, $n \geq 0$. Пояснимо, як використовувати зазначену умову. Оскільки дія є безрозмірною величиною $S = \int d^4x \mathcal{L}$, а розмірність координати - це розмірність оберненої маси $[x^\mu] = [m]^{-1}$, то розмірність лагранжіана має дорівнювати розмірності маси у 4 ступені $[\mathcal{L}] = [m]^4$. Розглянувши доданки найпростіших лагранжіанів вільних скалярного, векторного та ферміонного полів (розмірність похідної дорівнює розмірності маси $[\partial_\mu] = [\partial/\partial x^\mu] = [m]$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu, \quad \mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi,$$

легко знайти розмірності зазначених полів:

$$[\varphi] = [m], \quad [A_\mu] = [m], \quad [\Psi] = [m]^{3/2}. \quad (7.1)$$

Можна узагальнити отриманий результат, сказавши, що розмірність всіх бозонних полів це 1 (в одиницях розмірності маси), а розмірність ферміонних полів це $3/2$.

Використавши отриманий результат, легко знайти розмірності сталої зв'язку. Наприклад,

$$\mathcal{L}_{int} = -g\varphi^3, \quad [\mathcal{L}_{int}] = 4 = [g] + 3, \Rightarrow [g] = 1, \quad (7.2)$$

$$\mathcal{L}_{int} = -g\varphi^2 A^\mu A_\mu, \quad [\mathcal{L}_{int}] = 4 = [g] + 2 + 2, \Rightarrow [g] = 0, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{L}_{int} = -g\varphi \bar{\Psi}\Psi, \quad [\mathcal{L}_{int}] = 4 = [g] + 1 + 2 \cdot 3/2, \Rightarrow [g] = 0 \quad (7.4)$$

у наведених лагранжіанах взаємодії розмірність сталої зв'язку не є від'ємною, а отже зазначені взаємодії можуть входити у перенормовану теорію. Зокрема, важливим результатом є перенормованість теорії скалярної взаємодії $\mathcal{L}_{int} = -g\varphi^n$ лише при $n \leq 4$ (цим, до речі, і пояснюється той факт, що у потенціалі скалярного поля в теорії спонтанного порушення симетрії відсутні доданки п'ятого і старших ступенів).

Можна припустити, що існує не одна, а багато частинок, що не входять до СМ. Тоді загальний лагранжіан можна записати у вигляді

$$\mathcal{L}_{full} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{DM} + \mathcal{L}_{SM,DM}^{int}, \quad (7.5)$$

що являє собою суму лагранжіану СМ, лагранжіану темних частинок (може мати складну структуру) та лагранжіану взаємодії темних частинок з частинками СМ. Лагранжіан взаємодії дає можливість експериментально довести існування темних частинок та дослідити їх

властивості. Таким чином він слугує *порталом* у світ нової фізики. Лагранжіан взаємодії може мати різний вигляд в залежності від того, якими саме є темні частинки.

Серед можливих порталів є портали перенормованої взаємодії: скалярний, векторний, ферміонний портали, в яких частинки СМ взаємодіють з відповідною частинкою прихованого сектора (скалярною, векторною або ферміонною). Також є портали неперенормовної взаємодії. Їх слід розуміти як певні ефективні теорії поля, що відновлять свою властивість перенормовності при більш повному розширенні СМ (повна аналогія з теорією Фермі). До неперенормовних порталів належать портал аксіоноподібних частинок (псевдоскалярів) та портал Черна-Сімонса (векторні частинки з гарно визначеною комбінованою парністю відносно СР перетворень).

В подальшому ми розглянемо засначені основні варіанти можливої модифікації СМ та вкажемо існуючі обмеження на частинки нової фізики, вважаючи їх легкими (з масами в ГеВ-ному діапазоні).

7.1 Ідея пошуку легких, довгоживучих частинок нової фізики в експериментах на прискорювачах

Під словами легкі, довгоживучі частинки нової фізики маються на увазі частинки прихованого сектору СМ, що можуть народжуватися на існуючих сучасних прискорювачах (тобто їх маса має бути меншою за енергії частинок в прискорювачах) та при цьому слабо взаємодіють з частинками СМ і, відповідно, мають досить великий час життя, або можуть пролетіти макроскопічну відстань до того, як розпадутся.

Оскільки маси нових частинок достатньо малі, а взаємодія з частинками СМ слабка, то зазначені частинки будуть народжуватися в зіткненнях частинок СМ на прискорювачах, але процеси їх народження будуть рідкісними подіями. Окрім того, для спостереження нових частинок на детекторах, вони мають розпастися на СМ частинки, що також є рідкісним процесом. Виходячи з наведених фактів, стає зрозумілим, що для пошуку зазначених частинок потрібні експерименти з якомога більшою кількістю зіткнень налітаючих частинок (*intensity frontier experiments*) та з відсутністю фонових подій. Тобто, в ідеалі, якщо частинок нової фізики не буде, детектор не має реєструвати жодних подій. Це так звані безфонові експерименти (*background free experiments*) [176], наприклад, MATHUSLA, FACET, FASER, SHiP, NA62, DUNE та інші.

Розглянемо загальну ідею пошуку в експериментах проявів легких, довгоживучих частинок нової фізики на прикладі експерименту *SHiP Cern (Search for Hidden Particles)* [178], принципова схема якого представлена на Рис. 30.

В експерименті SHiP пучок налітаючих протонів (з енергією 400 ГеВ кожен) з передприскорювача SPS Великого адронного колайдера потрапляє у бічний тунель і зіштовхується з нерухомою металевою мішенню (target), що зображена ліворуч на Рис. 30. В результаті зіткнення народжується багато частинок СМ, включаючи адронні стани. Також в результаті протон-нуклонних зіткнень, або розпадів народжених адронних станів, очікується народження частинок нової фізики (BSM частинок, *BSM – Beyond Standard Model*). Наступним етапом є відсіяння частинок СМ шляхом розташування праворуч від мішені, див. Рис. 30, так званого поглинача частинок (декілька де-

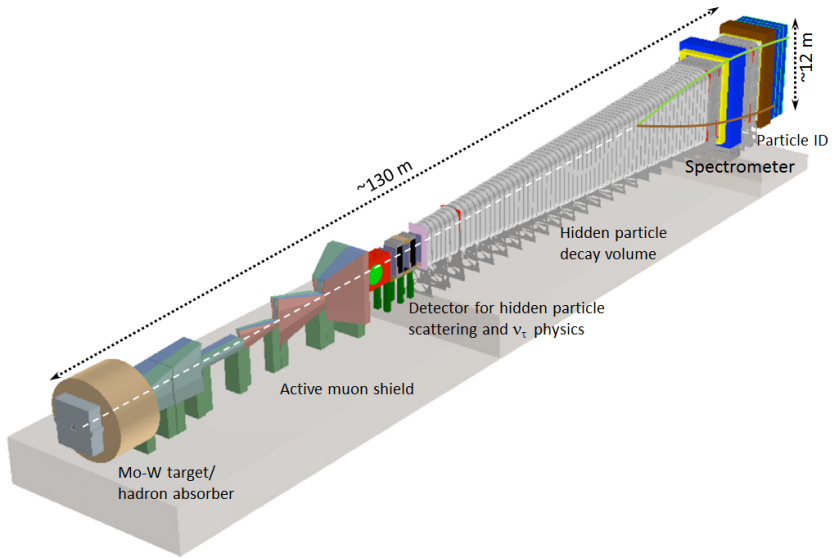


Рис. 30: Загальна схема експерименту SHiP. Рис. взято з [177].

сятків метрів бетонної або металевої перешкоди, hadron absorber) та так званих магнітних щитів (magnetic shield), тобто сильних магнітних полів, що відведуть в бік потік мюонів, які погано поглинаються в речовині. Внаслідок надзвичайно слабкої взаємодії BSM частинок з частинками СМ частинки нової фізики легко пройдуть зазначені перешкоди. В результаті у розташовану праворуч вакуумну камеру (hidden particle decay volume) мають потрапити лише частинки BSM¹. Якщо так трапиться, що в вакуумній камері BSM частинка розпадеться на частинки СМ, вони будуть задетектовані системою детекторів праворуч від камери. Таким чином, в ідеальній установці, детектори спрацюють лише з причини існування BSM частинок.

Кількість зареєстрованих подій розпадів BSM частинок можна оцінити за такою формулою

$$N_{\text{det}} = N_{\text{prod}} \times \epsilon_{\text{tot}} \times P_{\text{decay}}. \quad (7.6)$$

¹І нейтрино, бо немає механізму, щоб їх поглинути.

Розглянемо зміст окремих множників:

- N_{prod} – кількість утворених BSM частинок за час роботи експерименту. Якщо BSM частинка утворилася внаслідок розпаду СМ частинок X , що утворилися при протон-нуклонних зіткненнях, то $N_{\text{prod}} = N_{\text{PoT}} Br(pN \rightarrow X) Br(X \rightarrow BSM + \dots)$, де N_{PoT} – кількість зіткнень протонів з мішенню (proton-target collisions), $Br(pN \rightarrow X)$ – ймовірність народження частинок X при протон-нуклонних зіткненнях, $Br(X \rightarrow BSM + \dots)$ – ймовірність народження BSM частинок при розпаді X частинок.
- $\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_{\text{geom}} \times Br_{\text{vis}} \times \epsilon_{\text{det}}$ включає в себе добуток ймовірностей того, що народжена BSM частинка полетить в напрямку детектора (ϵ_{geom}); що вона розпадеться по видимим каналам реакції (продукти розпаду можуть бути задетектовані) (Br_{vis}); та на ймовірність того, що продукти розпаду полетять в напрямку детектора та будуть зареєстровані детектором (ϵ_{det}).
- P_{decay} – ймовірність того, що BSM частинка розпадеться в вакуумній камері¹:

$$P_{\text{decay}} = e^{-\frac{L\Gamma}{\gamma\beta}} - e^{-\frac{(L+\Delta L)\Gamma}{\gamma\beta}}, \quad (7.7)$$

де L – відстань від мішені до вакуумної камери, ΔL – довжина вакуумної камери, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = E_{\text{BSM}}/M_{\text{BSM}}$, $\beta = v/c$ та $\Gamma = 1/\tau$ – ширина розпаду BSM частинки.

Для ідеальної установки, за відсутності фонових подій, границя області чутливості експеримента з пошуку BSM частинок, знаходиться з умови $N_{\text{det}} = 3$, що відповідає 95% довірчому інтервалу [179]. Це означає, що трьох зареєстрованих подій буде досить для впевності у відкритті BSM частинки.

Виділемо явно залежність від сталої зв'язку g_* частинки BSM з частинками СМ. Для цього врахуємо², що кількість народжених BSM

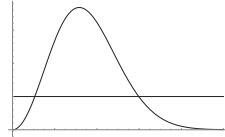
¹Тут враховано, що довжина вільного пробігу частинки (характерна довжина, яку проходить частинка перед тим як розпадеться) $L_0 = \beta\gamma\tau$.

²Справді, процеси народження та розпаду BSM частинок описуються відповідними діаграмами Фейнмана з однією вершиною, що містить сталу g_* . Відповідно амплітуда процесу $\sim g_*$, а відповідна фізична величина пропорційна квадрату амплітуди, тобто g_*^2 .

частинок $N_{prod} = g_\star^2 N'_{prod}$, $Br_{vis} = g_\star^2 Br'_{vis}$ та ширина розпаду $\Gamma = g_\star^2 \Gamma'$. Тоді

$$N_{det} = g_\star^4 N'_{prod} \times \epsilon'_{tot} \times \left(e^{-g_\star^2 \frac{L\Gamma'}{\gamma\beta}} - e^{-g_\star^2 \frac{(L+\Delta L)\Gamma'}{\gamma\beta}} \right). \quad (7.8)$$

Оскільки графік правої частини рівняння (7.8) схожий на гаусоїду, то рівняння, в дозволений області параметрів, матиме два розв'язки на сталу $g_\star$, що будуть залежати від маси BSM частинок. В результаті отримується область параметрів m_{BSM} та $g_\star$, нижня та верхня границі якої визначаються розв'язками (7.8) для $N_{det} = 3$. Всередині зазначеної області значення N_{det} буде суттєво більшим за 3. Отримана область параметрів m_{BSM} та $g_\star$ утворює так звану *область чутливості* експерименту, тобто область параметрів, за яких частинка BSM має бути задетектована.



Відзначимо, що слабким моментом наведеної схеми побудови області чутливості з пошуку частинок нової фізики є розрахунок повної ширини розпаду, або часу життя BSM частинок. Справа в тому, що повна ширина розпаду BSM частинки є сумою ширин розпадів за всіма можливими каналами. Ввівши певний лагранжіан взаємодії BSM частинки з частинками СМ, ми можемо порахувати ширини розпаду нової частинки на частинки СМ. Але може виявитися, що шукана BSM частинка матиме суттєву ширину розпаду і по каналам розпадів в інші, більш легкі, BSM частинки. Це станеться, якщо сталі зв'язку взаємодії BSM частинок з частинками СМ будуть дуже малими, а сталі зв'язку взаємодії з іншими BSM частинками будуть великими.

7.2 Скалярний портал

Загальний вигляд перенормовного Лагранжіана, що містить новий скаляр, який взаємодіє з частинками Стандартної моделі має вигляд

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + (\alpha_1 S + \alpha_2 S^2)(H^+ H) + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3 + \lambda_4 S^4, \quad (7.9)$$

де S легкий нейтральний скаляр, що взаємодіє з полем хіггсівського дублету H за допомогою сталих зв'язку α_1, α_2 , а сталі $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ визначають самодію скалярного поля. Очевидно, що стала α_1 має розмірність маси, а стала α_2 є безрозмірною. Оскільки такого роду взаємодію в експериментах не спостерігають, зазначені сталі мають бути малими: $\alpha_1/m_h \ll 1$, $\alpha_2 \ll 1$.

Звертаємо увагу, що оскільки ми вважаємо нейтральний скаляр незарядженим по відношенню до калібрувальних перетворень СМ, то в кінетичному доданку скалярного поля ми не можемо на цьому етапі записати подовжену похідну і ввести взаємодію з калібрувальними полями СМ.

Може виникнути сумнів у тому, що лагранжіан (7.9) є найбільш загальним. Однак, так воно і є. Справді, якщо ви захочете записати перенормовний лагранжіан взаємодії нового скаляра з ферміонним полем, то не зможете цього зробити, оскільки найпростіша версія його у формі $\sim S\bar{\Psi}\Psi = S(\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L)$, див. (D4.10), не може бути реалізована, оскільки у СМ праві ферміони являють собою синглети, а ліві – дублети групи $SU_W(2)$.

Підставивши у (7.9) вираз для поля Хіггса в унітарному калібруванні після спонтанного порушення симетрії (4.34), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + \frac{\alpha_1}{2} S h^2 + \frac{\alpha_2}{2} (S^2 h^2 + 2vS^2 h) + \alpha_1 v S h + \\ + \frac{\alpha_1 v^2 S + (\alpha_2 v^2 + 2\lambda_2) S^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (7.10)$$

Даний вираз містить доданок, у який входить лише одна польова функція (S). Такий доданок не має фізичного змісту (він не описує взаємодію з іншими полями чи самодію скалярного поля) і може бути знищений перевизначенням польової функції (зсувом на стале значення):

$$\frac{\alpha_1 v^2 S + (\alpha_2 v^2 + 2\lambda_2) S^2}{2} = \frac{\alpha_2 v^2 + 2\lambda_2}{2} \tilde{S}^2 + c = -\frac{m_S^2}{2} \tilde{S}^2 + c, \quad (7.11)$$

де $m_S^2 = -(\alpha_2 v^2 + 2\lambda_2)$, $\tilde{S} = S + \frac{\alpha_1 v^2}{2(\alpha_2 v^2 + 2\lambda_2)}$ – перевизначена функція поля нового скаляру. З фізичної точки зору проведене перевизначення означає, що поле $\tilde{S}$ має ненульове вакуумне середнє. В подальшому ми використовуватимемо позначення S замість $\tilde{S}$.

В результаті масові доданки лагранжіану поля Хіггса та нового скаляру набудуть недіагонального вигляду:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mass}^{h,S} &= -\frac{m_h^2 h^2}{2} - \frac{m_S^2 S^2}{2} + \alpha_1 v S h = \\ &= (h; S) \begin{pmatrix} -\frac{m_h^2}{2} & \frac{\alpha_1 v}{2} \\ \frac{\alpha_1 v}{2} & -\frac{m_S^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ S \end{pmatrix}, \quad (7.12)\end{aligned}$$

а отже, поле Хіггса та нове скалярне поле не знаходяться в масовому базисі і не мають визначеної маси (величини m_S та m_h не є масами полів). Перехід до масового базису можна зробити за допомогою унітарних перетворень, як ми це робили у Розділі 4.3. Для цього слід ввести нові польові функції

$$\begin{pmatrix} h' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ S \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} h \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ S' \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

та записати масову частину лагранжіану в термінах полів h' та S' .

Параметр θ обирається з умови діагонального вигляду масової матриці:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\alpha_1 v}{m_h^2 - m_S^2}. \quad (7.14)$$

Для малих значень сталої α_1 ($\alpha_1 v / m_h^2 \ll 1$) та у припущенні, що нова скалярна частинка набагато легша за бозон Хіггса, ми отримаємо явне значення для безрозмірного параметра θ :

$$\theta \approx \frac{\alpha_1 v}{m_h^2} \ll 1. \quad (7.15)$$

У цьому випадку поле Хіггса та поле нового скаляру у масових базисах запишуться як

$$h \rightarrow h + \theta S, \quad (7.16)$$

$$S \rightarrow S - \theta h. \quad (7.17)$$

За умови $\alpha_1 v/m_h^2 \ll 1$ недіагональні доданки масової матриці у (7.12) є малими, а отже після діагоналізації значення маси поля Хіггса (m_h) суттєво не зміниться.

Перетворення (7.16) слід провести у всьому лагранжіані СМ, що призведе до появи взаємодії нового скалярного поля з усіма масивними частинками СМ. Для випадку унітарного калібрування з виразів для взаємодії поля Хіггса з частинками СМ (4.101), (4.107) отримаємо доданки, що описують взаємодію нового скаляра з частинками СМ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM}^h \rightarrow \mathcal{L}_{SM}^{h+\theta S} = & -\frac{m_f}{v}(h+\theta S)\bar{f}f + \frac{2M_W^2}{v}(h+\theta S)W^+W^- + \\ & + \frac{M_Z^2}{v}(h+\theta S)Z^2 + \frac{M_W^2}{v^2}(h+\theta S)^2W^+W^- + \frac{M_Z^2}{2v^2}(h+\theta S)^2Z^2 - \\ & - \frac{M_h^2}{2v}(h+\theta S)^3 - \frac{M_h^2}{8v^2}(h+\theta S)^4. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Записавши останній вираз з урахуванням лише першого порядку малості за сталою θ , отримаємо лагранжіан взаємодії

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM,int}^S = & -\theta\frac{m_f}{v}S\bar{f}f + 2\theta\frac{M_W^2}{v}SW^+W^- + \theta\frac{M_Z^2}{v}SZ^2 + \\ & + \theta\frac{2M_W^2}{v^2}ShW^+W^- + \theta\frac{M_Z^2}{v^2}ShZ^2 - 3\theta\frac{M_h^2}{2v}Sh^2 - \theta\frac{M_h^2}{2v^2}Sh^3 + \\ & + \alpha_2\nu S^2h + \frac{\alpha_2}{2}S^2h^2, \end{aligned} \quad (7.19)$$

в який входять два невідомі параметра θ та α_2 . Останні доданки визначають квадратичну взаємодію за скалярним полем та обумовлені ненульовим значенням сталої α_2 зі стартового лагранжіану (7.9).

Як бачимо, інтенсивність взаємодії темних скалярів з частинками СМ (що визначається параметром θ) буде тим більшою, чим більшою є маса частинки, так само як і у випадку взаємодії бозону Хіггса з частинками СМ, порівняйте з (4.101) та (4.107).

Окрім прямих взаємодій, наведених у (7.19), існують також важливі ефективні петльові взаємодії BSM скалярів з частинками СМ. Петльові взаємодії BSM скалярів з елементарними частинками, що обумовлені ненульовим значенням сталої θ , представлені на Рис.31, а взаємодії з нуклонами представлені на Рис.32. Петльові взаємодії, що обумовлені ненульовим значенням сталої α_2 , представлені на Рис.33б).

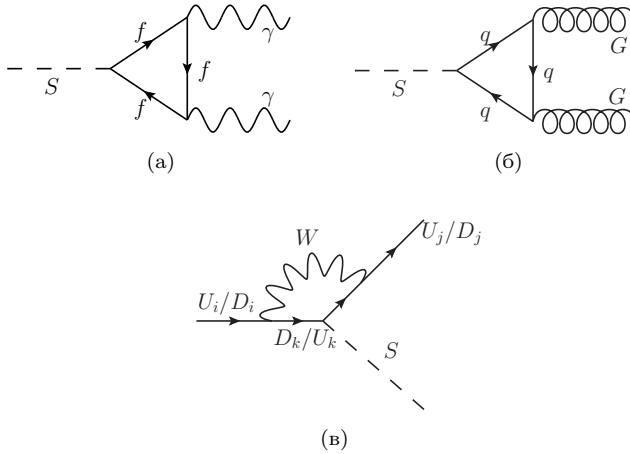


Рис. 31: Діаграми ефективної взаємодії BSM скаляра S з фотонами (а), глюонами (б), взаємодія з кварками зі зміною аромату (в) [180]. Взаємодія обумовлена ненульовим значенням параметру θ .

Знаючи прямі взаємодії скалярів (7.19), а також ефективні петльові взаємодії можна записати можливі канали народження BSM скалярів, див. Рис.34 та Рис.33. Стосовно каналів розпаду слід відзначити, що розпад BSM скаляра обумовлений лише ненульовим значенням

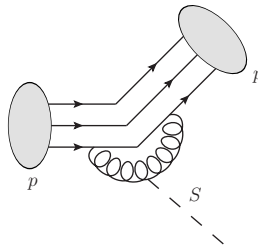


Рис. 32: Діаграма ефективної взаємодії BSM скаляра з протоном [180]. Взаємодія обумовлена ненульовим значенням параметру θ .

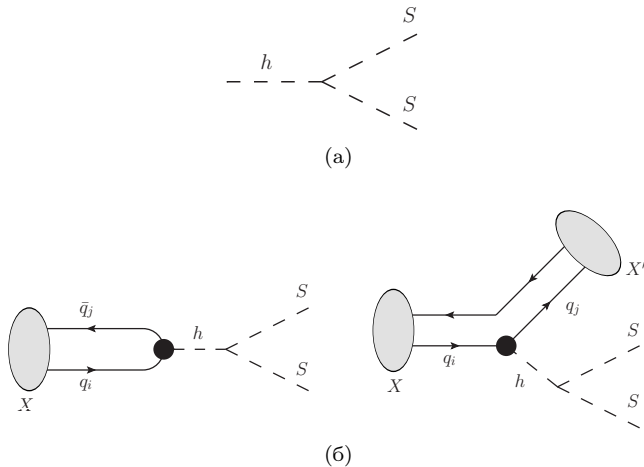


Рис. 33: Взаємодії, що обумовлені ненульовим значенням сталої α_2 .
Рис. взято з [180].

сталой θ . Взаємодія, що обумовлена ненульовим значенням сталої α_2 , не генерує розпади скаляра¹. Канали розпаду та час життя BSM скаляра наведений у роботах [173, 180], див. Рис.35.

Оскільки лагранжіан взаємодії BSM скаляра залежить від двох параметрів (θ та α_2), то побудова області чутливості як функції цих двох параметрів є досить складною задачею. Тому наводять два графіки чутливості: як функцію параметра θ при $\alpha_2 = 0$ та як функцію параметра θ при $\alpha_2 = \alpha_2^{max}$. Справа в тому, що на параметр α_2 існує обмеження зверху, а саме з ширини розпаду бозону Хіггса по невидимим каналам розпаду (продукти розпаду за цими каналами не фіксуються детекторами). Згідно з результатами [181]

$$Br(h \rightarrow invis.) < 0.19. \quad (7.20)$$

Припускаючи, що всі невидимі канали розпаду бозону Хіггса являють собою розпад бозону Хіггса в два скаляри $h \rightarrow SS$ ($m_S < m_h/2$), що описується лагранжіаном взаємодії $\alpha_2 \nu S^2 h$, можна отримати обмеження на α_2 : $\alpha_2 < \alpha_2^{max} = 6.3 \cdot 10^{-3}$. Ненульове значення параметра

¹Можуть бути реакції анігіляції за участі двох скалярів типу $SS \rightarrow h \rightarrow \ell\ell^+$.

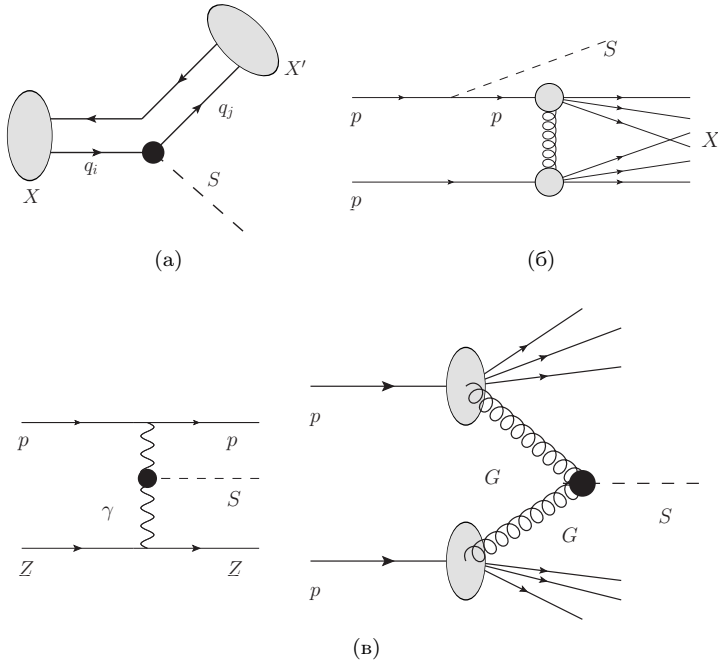


Рис. 34: Діаграми головних каналів народження BSM скалярів S в розпадах мезонів (а), в непружних розсіяннях протонів (б), в фотон-фотонних та глюон-глюонних взаємодіях (в) [180].

α_2 відкриває нові канали народження скалярів через реакцію $h \rightarrow SS$. Це може бути пряме народження в реакції $h \rightarrow SS$ у високоенергетичних експериментах, або через віртуальний бозон Хігса в розпадах мезонів типу $X \rightarrow X'SS$.

Існуючі обмеження з даних спостережень (з космології та вже проведених експериментів) представлені зафарбованими областями на Рис.37. Незафарбовані контури на Рис.37 надають області чутливості майбутніх експериментів.

Важливим аспектом скалярного порталу є його тісний зв'язок з полем Хігса, див. (7.14), з якого випливає, що параметр θ міг бути досить значним у ранньому Всесвіті під час електрослабкого переходу

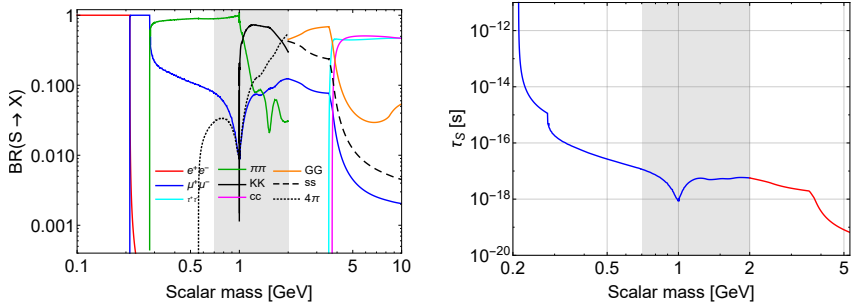


Рис. 35: Ліворуч представлено бранчінг розпадів BSM скаляра, обумовлений ненульовим значенням сталої θ , як функція його маси. Праворуч наведено час життя BSM скаляра, як функція його маси при $\theta = 1$. Рис. взято з [180].

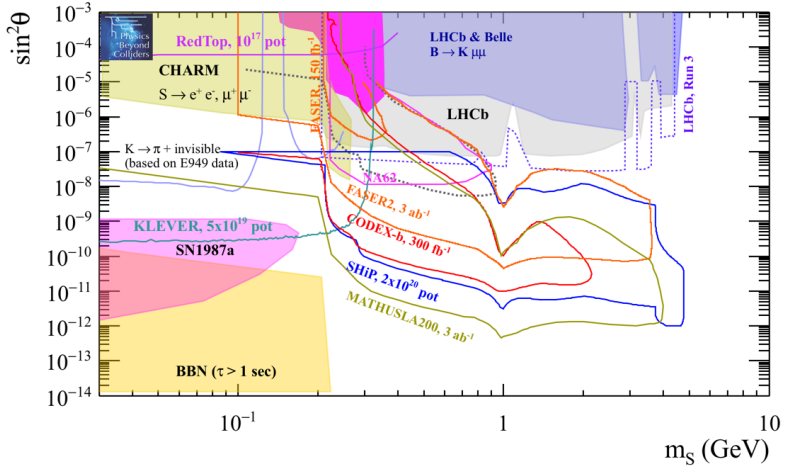


Рис. 36: Області чутливості різних експериментів до пошуку BSM скаляра, випадок $\alpha_2 = 0$. Зафарбовані області – виключені області параметрів BSM скалярів. Незафарбовані контури – області чутливості майбутніх експериментів, див. детальніше [176]. Рисунок взято з [176].

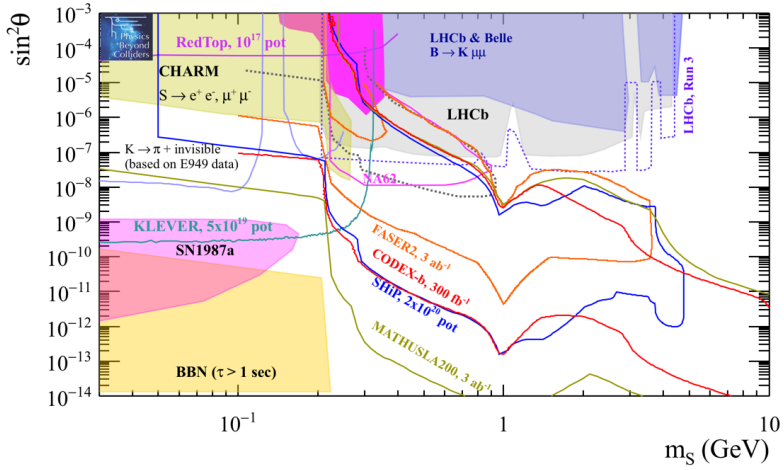


Рис. 37: Области чутливості різних експериментів до пошуку BSM скаляра, випадок $\alpha_2 \neq 0$ і відповідає випадку $Br(h \rightarrow SS) = 0.1$. Зафарбовані області – виключені області параметрів BSM скалярів. Незафарбовані контури – області чутливості майбутніх експериментів, див. детальніше [176]. Рисунок взято з [176].

на етапі, коли маса бозона Хіггса була порівняна з масою скаляра [182].

Для додаткової інформації див., наприклад, [173], [174], [180].

7.3 Нейтринний портал

Експериментально підтверджений факт наявності нейтринних осциляцій однозначно вказує на наявність у нейтрино маси, що суперечить положенням СМ. Отже СМ необхідно відповідним чином модифікувати для вирішення даної проблеми. Окрім того, що повна теорія розширеної СМ має містити масивні активні нейтрино передбачається існування нових масивних нейтрино поза межами СМ.

Основним аргументом для введення нових масивних нейтрино є намагання природнім чином пояснити надзвичайно малі значення мас активних нейтрино¹ за допомогою так званого *see-saw* механізму. В 70-х роках минулого століття Мюррей Гелл-Манн, П'єр Рамонд, Річард Сланскі та Тсутому Янагіда [183, 184] запропонували інтуїтивно простий механізм генерування маси нейтринного поля, що отримав назву "see-saw" механізму (механізм гойдалки). Даний механізм базується на дірак-майоранівському способі генерації маси нейтрино. При певних припущеннях на параметри дірак-майоранівської матриці впливає, що маси активних нейтрино є обернено пропорційними до мас нових нейтрино з правою кіральністю. Отже чим більшими є маси нових нейтрино, тим меншими є маси активних нейтрино (гойдалка)!

Найпростішим спосіб нейтринної модифікації СМ передбачає розширення СМ шляхом введення синглетів нейтрино з правою кіральністю (в СМ всі ферміони з правою кіральністю є синглетами), що надзвичайно слабо взаємодіють з частинками СМ. Такі нейтрино отримали назву стерильних нейтрино або важких нейтральних лептонів (heavy neutral leptons, **HNL**). Перенормовна взаємодія нових нейтрино з частинками СМ має вигляд аналогічний до юкавівської взаємодії дублетів лівих кварків з синглетами правих u_n кварків ($\sim Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n$, див. (4.11)):

$$\mathcal{L}_{int} = - \left(F_{\alpha I} \bar{L}_\alpha \tilde{H} N_I + h.c. \right), \quad (7.21)$$

де індекс $\alpha = e, \mu, \tau$ відповідає лептонним ароматам, I змінюється від 1 до кількості стерильних нейтрино, L_α – лептонний дублет, N_I – польові функції правих стерильних нейтрино, $F_{\alpha I}$ – нова матриця констант Юкави, $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$.

¹Якщо вважати, що маси нейтрино утворюються через механізм Хіггса аналогічно до мас інших частинок СМ, то відповідні Юкавівські сталі будуть $\sim 10^{-12}$, що суттєво менше за значення інших сталей Юкави, див. Табл. 5.

Потрібно відзначити, що умовою інваріантності лагранжіану (7.21) відносно перетворень групи $U_Y(1)$, згідно з Табл. 1, є умова рівності нулю гіперзаряду стерильного нейтрино¹. Легко побачити, що умовою інваріантності відносно перетворень груп $SU_W(2)$, $SU_C(3)$, також є умова рівності нулю відповідних зарядів стерильного нейтрино. Отже стерильне нейтрино не є зарядженим відносно калібрувальних груп СМ, що й виправдовує його назву.

Використавши вираз для поля Хіггса після спонтанного порушення симетрії в унітарному калібруванні (4.79), легко побачити, що зазначений лагранжіан описує взаємодію між активними та стерильними нейтрино

$$\mathcal{L}_{int} = -(\bar{\nu}_\alpha (M^D)_{\alpha I}^+ N_I + \bar{N}_I M_{I\alpha}^D \nu_\alpha), \quad M^D = \frac{v}{\sqrt{2}} F^+. \quad (7.22)$$

Вважаючи стерильні нейтрино майоранівськими частинками, можемо записати загальний лагранжіан модифікованого нейтринного сектора СМ у дірак-майоранівському формалізмі, див. [78, 97, 185]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu, N} &= i\bar{\nu}_k \not{\partial} \nu_k + i\bar{N}_I \not{\partial} N_I - \left((M^D)_{\alpha I}^+ \bar{\nu}_\alpha N_I + \frac{M_I}{2} \bar{N}_I^c N_I + h.c. \right) = \\ &= i\bar{\nu}_k \not{\partial} \nu_k + i\bar{N}_I \not{\partial} N_I - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_\nu (M^{DM})^+ \Psi_\nu^c + \bar{\Psi}_\nu^c M^{DM} \Psi_\nu), \end{aligned} \quad (7.23)$$

де ми ввели позначення²

$$\Psi_\nu = \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_I^c \end{pmatrix}; \quad \Psi_\nu^c = \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_I \end{pmatrix}; \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}; \quad N_I = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \dots \\ \nu_{NR} \end{pmatrix}; \quad (7.24)$$

$$M^{DM} = \begin{pmatrix} 0 & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

де T означає транспонування, M^R – діагональна матриця мас стерильних нейтрино з елементами M_I на діагоналі. У виразі (7.23) присутні масові діагональні доданки стерильних нейтрино, відсутні масові доданки активних нейтрино, але присутні змішані масові доданки

¹В цьому легко переконатися, врахувавши, що $Y_L = -1$, $Y_H = +1$ та $Y_{\bar{H}} = -1$.

²Враховуючи, що зарядове спряження змінює кіральність функції, отримуємо, що Ψ_ν містить лише функції лівої кіральності, а Ψ_ν^c – правої кіральності.

активних та стерильних нейтрино. В результаті діагоналізації масової матриці (7.25) отримаємо масові стани активних нейтрино. Зокрема, вираз для масової матриці активних нейтрино матиме вигляд

$$(M_\nu^{active})_{\alpha\beta} = -[(M^D)^T(M^R)^{-1}M^D]_{\alpha\beta} = -\sum_{I=1}^N \frac{M_{I\alpha}^D M_{I\beta}^D}{M_I}, \quad (7.26)$$

при цьому вираз для масової матриці стерильних нейтрино практично не зміниться.

В результаті перевизначення нейтринних функцій отримаємо, що функції активних нейтрино представляються у вигляді масових станів активних та стерильних нейтрино:

$$\nu_L = (1 - \frac{1}{2}\varepsilon^+\varepsilon)U_1\nu_{mL} + \varepsilon^+U_2N^c, \quad (7.27)$$

де $\varepsilon_{I\alpha} = [(M^R)^{-1}M^D]_{I\alpha} = (M^D)_{I\alpha}/M_I = \frac{v}{M_I} \frac{(F^+)_{I\alpha}}{\sqrt{2}}$ ($M^R = \text{diag}(M_I)$), U_1 – унітарна матриця, що діагоналізує масову матрицю активних нейтрино M_ν^{active} , U_2 – унітарна матриця, що діагоналізує масову матрицю стерильних нейтрино (в нашому випадку це одинична матриця). Це означає, що стерильні нейтрино взаємодіють з частинками СМ аналогічно до активних нейтрино, див. (4.106):

$$\mathcal{L}_{int} = -\sum_{I,\alpha} \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}(\varepsilon^+)_{\alpha I} \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_I^c W_\mu^- + \frac{g}{4\cos\theta_W}(\varepsilon^+)_{\alpha I} \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_I^c Z_\mu + \varepsilon_{I\alpha} \frac{M_I}{v} h \bar{N}_I \nu_\alpha + \text{h.c.} \right), \quad (7.28)$$

де останній доданок походить з (7.21), (7.22), де врахований внесок від поля Хіггса.

Потрібно звернути увагу, що в СМ єдиним джерелом порушення СР-інваріантності є одна комплексна фаза матриці Каббібо-Кобаяши-Маскави. Зазначена матриця описує змішування між кварками різних поколінь. Нагадаємо також, що в СМ не має аналога матриці ККМ в слабкому секторі, що входить у лагранжіан взаємодії заряджених лептонів та активних нейтрино внаслідок припущення щодо безмасовості активних нейтрино. Однак така матриця виникне у випадку, коли активні нейтрино стануть масивними частинками. Вона отримала

назву матриці Понтекорво-Макі-Накагава-Саката (ПМНС). Важливим є те, що вона містить три неусувні комплексні фази. Більш того, в теорії HNL матриця Юкави, що описує взаємодію між активними та стерильними нейтрино також може містити комплексні елементи. Отже теорія масивних нейтрино має суттєво більші можливості для опису CP-інваріантності, див., наприклад, [97].

Внаслідок того, що існує два різних масштаби для мас активних нейтрино (5.1) Δm_{atm}^2 та Δm_{sol}^2 (мінімум існує два масивних стани нейтрино) з дірак майоранівського формалізму опису маси нейтрино однозначно випливає, що кількість нових нейтрино з правою кіральністю є два або більше. Введення лише двох нових нейтрино з правою кіральністю призводить до появи в теорії 11 нових параметрів, що дозволяють описати всі дані спостережень осциляцій активних нейтрино. При цьому матимемо одне безмасове активне нейтрино та два масивних активних нейтрино, що не суперечить даним спостережень. Однак введення третього нейтрино з правою кіральністю призводить до появи в теорії ще 7 додаткових параметрів, що дозволяє також пояснити природу темної матерії та баріонної асиметрії Всесвіту. Нейтринна модифікація SM, в якій шляхом введення **трьох** додаткових нейтрино з правою кіральністю вдається описати явища нейтринних осциляцій, природу темної матерії та баріонну асиметрію Всесвіту отримала назву *мінімальної нейтринної модифікації Стандартної Моделі ν MSM* [109]. Авторами теорії є Михайло Шапошников та Такехіто Асака.

Згідно моделі ν MSM темна матерія складається зі стерильних нейтрино з масою декілька кеВ. Два інших стерильних нейтрино є суттєво важчими (до 100 ГеВ), але для забезпечення потрібної баріонної асиметрії у Всесвіті вони повинні мати близькі значення мас.

Пошук важких стерильних нейтрино проводиться в експериментах на прискорювачах¹, а пошук проявів найлегшого стерильного нейтрино (кандидата на частинку темної матерії) шукають у піках фонового електромагнітного випромінювання у Всесвіті, див. Рис.38.

Діаграма розпаду найлегшого стерильного нейтрино на три активних нейтрино (Рис.38a) дає основний внесок в розпад стерильного нейтрино, але експериментально задетектувати таку подію надзви-

¹Вважається, що важкі стерильні нейтрино мали розпастися за час $t < 0.1$ сек після великого вибуху, інакше вони б мали вплив на процес первинного нуклеосинтезу.

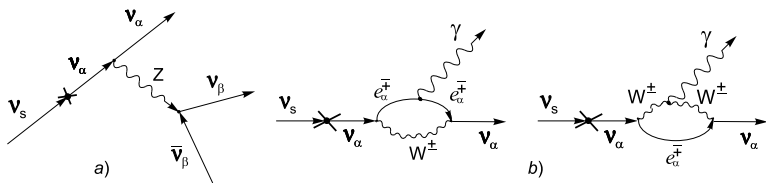


Рис. 38: Розпад найлегшого стерильного нейтрино: ν_s – стерильне нейтрино, ν_α – активне нейтрино з ароматом α , $e_\alpha^\pm$ – заряджені лептони відповідного аромату.

чайно складно. А от розпад стерильного нейтрино на пару фотон та нейтрино (Рис. 38b) є можливість помітити з даних супутникових спостережень. А саме очікується знайти пік у фоні електромагнітного випромінювання у Всесвіті, що відповідає енергії фотонів $E_\gamma = M_1/2$, де M_1 – маса найлегшого стерильного нейтрино. Справа в тому, що згідно теорії ν MSM найлегші стерильні нейтрино з масою $m_s > 0.4$ кеВ є нерелятивістськими у наш час. Грубо можна вважати їх нерухомими. Тоді при розпаді стерильного нейтрино на фотон та майже "безмасове" активне нейтрино енергія між ними буде ділитися навпіл.

На даний час не існує експериментального підтвердження існування стерильних нейтрино, але їх пошук продовжується. Слід відзначити, що у 2014 році [186, 187] був помічений пік електромагнітного випромінювання, який дозволяє інтерпретацію розпаду стерильного нейтрино з масою 7 кеВ. Однак даних спостережень поки не достатньо, щоб інші можливі трактування природи даного піку були відкинуті.

Розглянемо тепер основні канали народження та розпаду HNL на прискорювачах. Ключовим моментом є те, що для фізики на прискорювачах масивні стерильні нейтрино взаємодіють з частинками СМ так само, як і звичайні нейтрино, але з іншою сталою зв'язку. Для спрощення ситуації часто розглядають варіант існування всього одного HNL. Тоді вираз (7.28) спроститься до вигляду

$$\mathcal{L}_{int} = - \sum_{\alpha} \left(\frac{g}{2\sqrt{2}} U_{\alpha} \bar{\ell}_{\alpha} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) N^c W_{\mu}^{-} + \frac{g}{4 \cos \theta_W} U_{\alpha} \bar{\nu}_{\alpha} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) N^c Z_{\mu} + U_{\alpha} \frac{M}{v} h \bar{N} \nu_{\alpha} + \text{h.c.} \right), \quad (7.29)$$

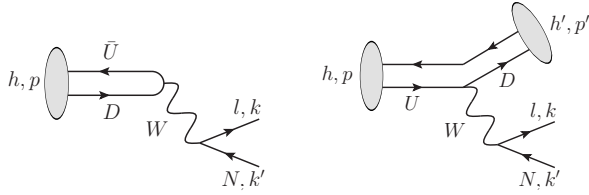


Рис. 39: Діаграми народження HNL у лептонних (ліворуч) та напів-лептонних (праворуч) розпадах мезонів. Рисунок взято з [188].

де величини $U_\alpha = (M^D)_\alpha/M_N$ називають кутами змішування стерильного нейтрино з активним нейтрино аромату α . Відповідно, експериментальні обмеження отримуються на масу HNL M_N та кути змішування U_α , $\alpha = e, \mu, \tau$.

До основних каналів народження HNL можна віднести лептонні та напівлептонні розпади мезонів, див. Рис.39, а також їх народження при нуклон-нуклонних зіткненнях, див. Рис.40.

Існуючі обмеження на параметри моделі HNL наведені на Рис.41 в електронно-домінантній ($U_e \neq 0$, $U_\mu = 0$, $U_\tau = 0$), в мюонно-домінантній ($U_e = 0$, $U_\mu \neq 0$, $U_\tau = 0$), а також в тау-домінантній ($U_e = 0$, $U_\mu = 0$, $U_\tau \neq 0$) моделях.

Для додаткової інформації див., наприклад, [173], [174], [188], [189].

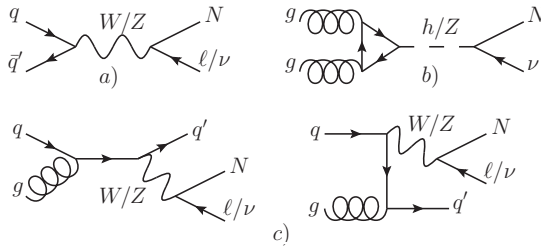


Рис. 40: Діаграми народження HNL у нуклон-нуклонних зіткненнях. Рисунок взято з [188].

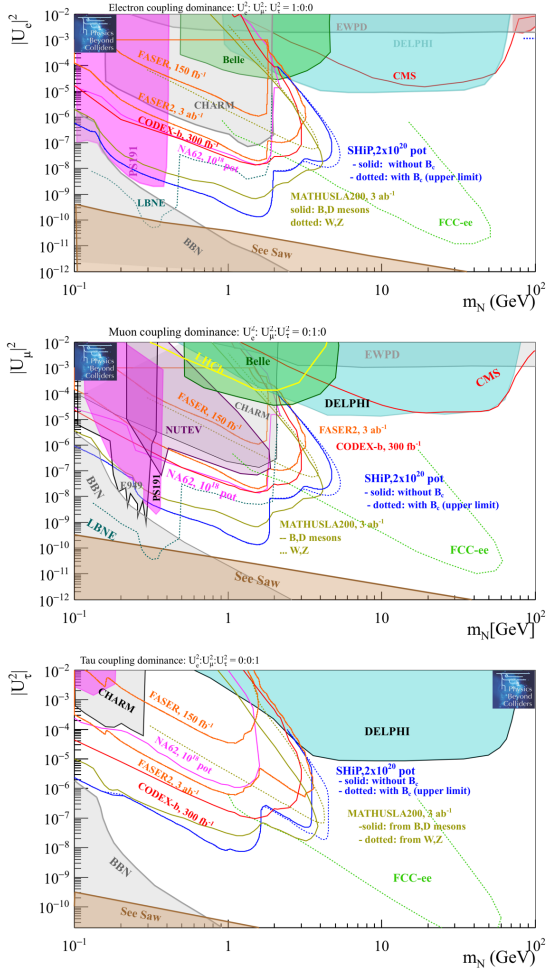


Рис. 41: Обмеження на параметри ННЛ в електронно-, мюонно-, та тау-домінантних моделях згори вниз, відповідно. Зафарбовані області відповідають вже виключеним параметрам ННЛ. Наведені контури області чутливості для майбутніх експериментів. Рис. взято з [188].

7.4 Векторний портал. Кінетичне змішування

Введемо поле векторних масивних бозонів A'_μ (темних фотонів), що є калібрувальним полем додаткової калібрувальної групи $U'(1)$ з відповідним тензором напруженості $F'_{\mu\nu}$, що може взаємодіяти з полем $U_Y(1)$ СМ через тензор напруженості $F_Y^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{\text{Vector portal}} = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} F'_{\mu\nu} F_Y^{\mu\nu}, \quad (7.30)$$

де $\tilde{\epsilon}$ — безрозмірна стала. Така взаємодія отримала назву кінетичного змішування.

Наведений лагранжіан взаємодії є, очевидно, перенормовним та калібрувально інваріантним (кожен з окремих тензорів $F_Y^{\mu\nu}$ та $F'_{\mu\nu}$ є калібрувально інваріантним). Якщо переписати тензор $F_Y^{\mu\nu}$ після спонтанного порушення симетрії поля Хіггса через поля Z -бозонів та фотонів, то стала $\tilde{\epsilon}$ визначатиме взаємодію темних фотонів з зазначеними полями. В цьому випадку $F_Y^{\mu\nu} = \cos \theta_W F^{\mu\nu} - \sin \theta_W Z^{\mu\nu}$, див. (4.60), де $F_{\mu\nu}$ — тензор Максвелла для електромагнітного поля, $Z^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$ — тензор поля Z -бозонів. Лагранжіан взаємодії (7.30) набуде вигляду

$$\mathcal{L}_{\text{Vector portal}} = \frac{\tilde{\epsilon} \cos \theta_W}{2} F'_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\tilde{\epsilon} \sin \theta_W}{2} F'_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}. \quad (7.31)$$

Розглянемо найпростіший спосіб як ввести взаємодію між частинками СМ та новим векторним полем на прикладі теорії типу КЕД з безмасовим векторним полем групи $U_{EM}(1)$ (фотонем) та одним (або декількома) новим масивним векторним бозоном групи $U'(1)$ припустивши, що існує взаємодія між кінетичними доданками калібрувальних полів¹. Запишемо лагранжіан² даної моделі [191]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_{\chi, A'} - \frac{\epsilon}{2} F^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{m_{A'}^2}{2} A'_\mu A'^\mu, \quad (7.32)$$

де $\mathcal{L}_{\chi, A'}$ — лагранжіан типу КЕД

¹Зазначена модель отримала назву моделі *парафотонів* та була запропонована Л.Б. Окуном на початку 1980-х [190].

²Для того, щоб теорія з масивним полем A' була перенормовною, маса поля A' має генеруватися через спонтанне порушення симетрії певного скалярного поля, зарядженого відносно групи $U'(1)$, див. вступ до Розділу 3. Маса темного фотона може задаватися і без механізму Хіггса, якщо векторне поле темного фотона є полем Штюкельберга.

$$\mathcal{L}_{\chi, A'} = -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \bar{\chi}[\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_\chi A'_\mu) - m_\chi]\chi, \quad (7.33)$$

де $F_{\mu\nu}$ та $F'_{\mu\nu}$ відповідні тензори напруженостей полів, $\epsilon = \tilde{\epsilon} \cos \theta_W$, χ – можливі додаткові ферміони поза СМ, що заряджені відносно "темної" групи $U'(1)$. В граничному випадку $\epsilon \rightarrow 0$, два сектори моделі стають повністю незалежними один від одного. Використавши рівняння руху $\partial_\mu F_{\mu\nu} = eJ_\nu^{\text{EM}}$, доданок взаємодії можна записати у вигляді

$$\mathcal{L}_{\text{Vector portal}} = \frac{\epsilon}{2}F^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = \epsilon F^{\mu\nu}\partial_\mu A'_\nu = -e\epsilon A'^\mu J_\mu^{\text{EM}}, \quad (7.34)$$

у якому новий масивний векторний бозон A' взаємодіє з електромагнітним струмом зі сталою зв'язку, що є добутком електричного заряду електрона за модулем на малий параметр ϵ .

Той факт, що лагранжіан взаємодії (7.34) є аналогічним до лагранжіану КЕД надає значні розрахункові переваги, зокрема можна легко отримати повну ширину розпаду A' бозону, що складається з суми ширин його розпадів на лептони та адрони. Ширина розпаду в лептони рахується по правилам діаграмної техніки КЕД, але з урахуванням маси A' бозону

$$\Gamma(A' \rightarrow \ell^+\ell^-) = \frac{\epsilon^2\alpha(s)}{3}m_{A'}\sqrt{1 - \left(\frac{2m_\ell}{m_{A'}}\right)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2m_\ell}{m_{A'}}\right)^2\right), \quad (7.35)$$

де α – стала тонкої структури на масштабі $\sqrt{s} = m_{A'}$. Якщо $m_{A'} \gg 2m_\ell$, легко отримати, що $\Gamma(A' \rightarrow \ell^+\ell^-) \rightarrow \frac{\epsilon^2\alpha}{3}m_{A'}$. Якщо ввести величину¹ $Rr(s) = \frac{\epsilon^2\alpha(s)}{3}m_{A'} = \Gamma(A' \rightarrow \ell^+\ell^-)|_{m_{A'} \gg 2m_\ell}$, то

$$\frac{\Gamma(A' \rightarrow \ell^+\ell^-)}{Rr(s)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\ell}{m_{A'}}\right)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2m_\ell}{m_{A'}}\right)^2\right). \quad (7.36)$$

Зазначимо, що в СМ відношення

$$R(\sqrt{s}) = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \ell^+\ell^-)}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\ell}{\sqrt{s}}\right)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2m_\ell}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \quad (7.37)$$

також дорівнює правій частині виразу (7.36). Знаменник виразу (7.37)

¹Необхідність фіксування явного вигляду $Rr(s) = \frac{\epsilon^2\alpha(s)}{3}m_{A'}$ полягає саме для отримання правої частини виразу (7.36).

також знаходиться в наближенні¹ $\sqrt{s} \gg 2m_\mu$, а $\sqrt{s}$ – енергія e^-e^+ пари в системі центру інерції.

Кварки, які утворюються при e^-e^+ анігіляції не можуть бути вільними частинками. Над ними відбувається так званий процес адронізації, в результаті якого утворюються різні мезонні стани. При цьому функція $R(\sqrt{s})$ набуває складного вигляду й отримується з експериментальних даних з e^-e^+ анігіляції в адронні стани, див. Рис. 42. Функція $R(\sqrt{s})$ отримала назву функції *R-ratio*, див. [53] та розділ 19 [67], де роз'яснюється поведінка функції $R(\sqrt{s})$.

З наведеного випливає, що для розрахунку ширини розпаду темного фотону в адрони слід взяти експериментально відомі дані електрон-позитронної анігіляції в адронні стани

$$\Gamma(A' \rightarrow hadrons) = \frac{\epsilon^2 \alpha}{3} m_{A'} R(m_{A'}), \quad (7.38)$$

де значення функції $R(\sqrt{s})$ наведено на Рис. 42. Це пов'язано з тим, що при невеликих значеннях енергії e^-e^+ анігіляція в адрони відбувається через віртуальний фотон з квадратом 4-імпульсу $q^2 = s$, який можна формально вважати масивним бозоном з масою $m_{A'} = \sqrt{s}$.

За допомогою співвідношень (7.35) та (7.38) легко отримати залежність часу життя темного фотону від його маси та параметра ϵ , див. Рис. 44:

$$\tau = \Gamma_{total}^{-1}, \quad \Gamma_{total} = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \Gamma(A' \rightarrow \ell^- \ell^+) + \Gamma(A' \rightarrow hadrons). \quad (7.39)$$

Домінуючими каналами народження темних фотонів будуть, див. [192]: фотонні розпади легких мезонів ($\pi^0 \rightarrow \gamma + A'$, $\rho^{\pm,0}, \omega \rightarrow \pi^{\pm,0} + A'$ для легких темних фотонів) та народження при розсіянні заряджених частинок (подібно випроміненню фотонів з лінії реальних частинок), див. Рис. 43. Це інтуїтивно зрозуміло, бо фотони народжуються в реакціях з електрично зарядженими частинками, відповідно й ймовірність, що від взаємодії з електрично зарядженими частинками (зі сталою зв'язку ϵe) народяться і масивні темні фотони.

¹Величина $\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)$ в наближенні $\sqrt{s} \gg 2m_\mu$ фіксується значенням $4\pi\alpha(s)/(3s)$. Необхідність фіксування значення перерізу додатково обумовлена фактом, що при великих енергіях в процес $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ може давати суттєвий внесок діаграма з віртуальним Z бозоном.

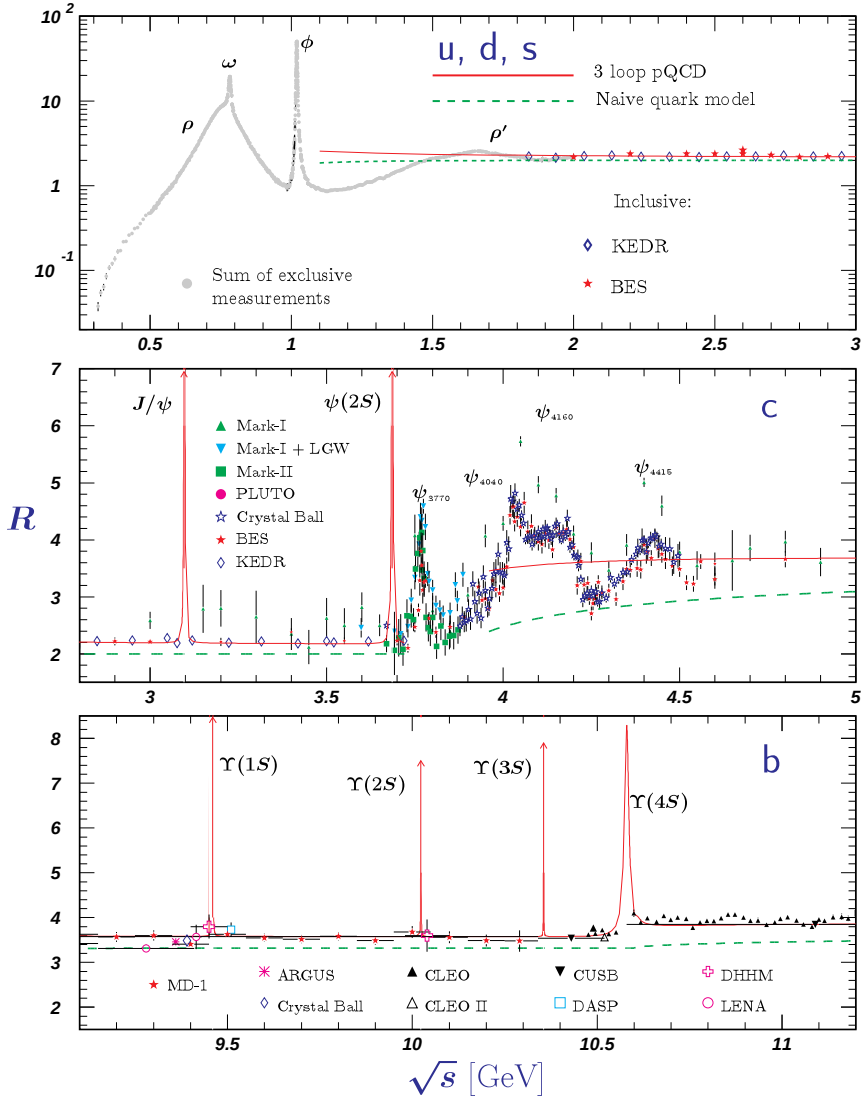


Рис. 42: Функція $R^{hadr}(\sqrt{s}) = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow hadrons)}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+)}$. Дані взято з [53].

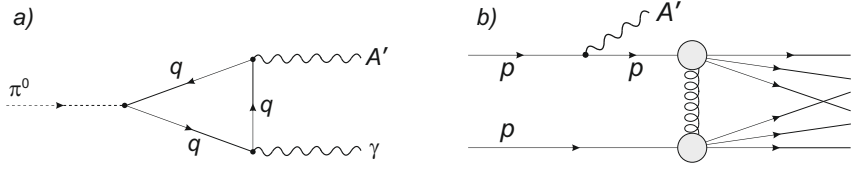


Рис. 43: Діаграми народження темних фотонів в результаті взаємодії з електрично зарядженими частинками СМ: а) при розпаді π^0 мезона, б) при протон-протонному розсіянні.

Існуючі обмеження на параметри моделі темного фотона наведені на Рис. 45. При великих масах темного фотона (енергіях взаємодіючих частинок) необхідно враховувати і його взаємодію з Z -бозонами.

В загальному ж випадку, в підході ефективної теорії поля (в моделі *Minimal flavor violation*) взаємодія нового векторного поля V_μ з ферміонами СМ набуває вигляду [173, 193]:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = V^\mu \bar{Q}_m \gamma_\mu C_{mn}^Q Q_n + V^\mu \bar{U}_m \gamma_\mu C_{mn}^U U_n + V^\mu \bar{D}_m \gamma_\mu C_{mn}^D D_n + V^\mu \bar{L}_m \gamma_\mu C_{mn}^L L_n + V^\mu \bar{E}_m \gamma_\mu C_{mn}^E E_n, \quad (7.40)$$

що містить невідомі матриці C_{mn}^I .

Для додаткової інформації див., наприклад, [173], [174], [194].

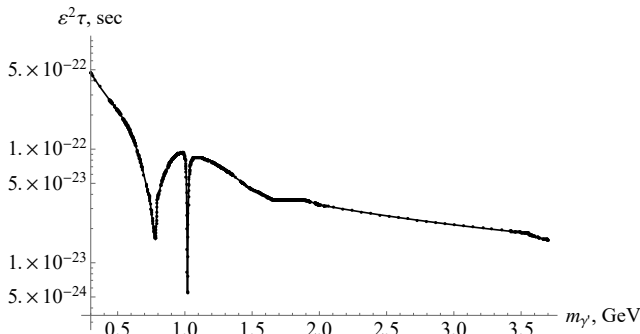


Рис. 44: Час життя темного фотону як функція маси та параметра ϵ .

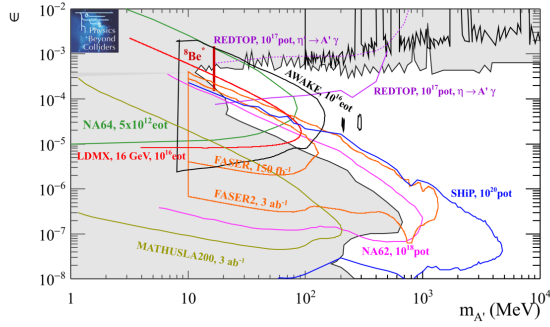
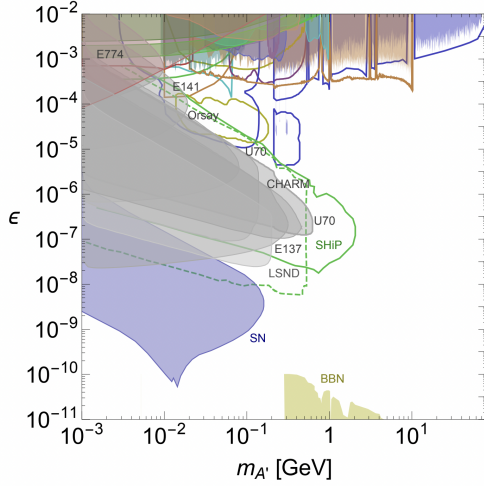


Рис. 45: Обмеження на параметри моделі темного фотона [174], [176]. Зафарбовані області відповідають вже виключеним параметрам моделі. Наведені контури області чутливості для майбутніх експериментів.

7.5 Поле Штюкельберга в СМ. Маса фотона

Отримані результати для визначення маси поля Штюкельберга у випадку його взаємодії зі скалярним полем зі спонтанним порушенням симетрії з інваріантністю відносно калібрувальних перетворень групи $U(1)$, див. Розділ (3.8), можна узагальнити і для лагранжіану Стандартної Моделі, див. Розділ 4. В цьому випадку нас цікавлять лише лагранжіан калібрувальних полів електрослабкої взаємодії (4.29) – (4.31) та поля Хігса

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^3 A_{\mu\nu}^i A^{i,\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu H^+ \mathcal{D}^\mu H - \lambda \left(H^+ H - \frac{\nu^2}{2} \right)^2, \quad (7.41)$$

де подовжена похідна, що діє на дублет поля Хігса, має вигляд (4.20)

$$\partial_\mu H \rightarrow \mathcal{D}_\mu H = \left(\partial_\mu - ig \sum_{i=1}^3 T_W^i A_\mu^i - ig' \frac{Y_H}{2} V_\mu \right) H \quad (7.42)$$

та ми змінили позначення векторних полів, щоб вони були подібними до позначень Розділу 3.8.

В неунітарному калібруванні вираз для дублету поля Хігса матиме вигляд (4.203)

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{v + h + i\phi_z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Якщо вважати поле калібрувальне поле V_μ групи $U_Y(1)$ полем Штюкельберга, то лагранжіан СМ слід модифікувати як [65]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m} \right) \left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m} \right) - \\ & - \frac{1}{2\xi'} \left(\partial^\mu V_\mu + \xi' m B - \xi' g' \frac{Y_H}{2} \nu \phi_z \right)^2 \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 A_{\mu\nu}^i A^{i,\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu H^+ \mathcal{D}^\mu H - \lambda \left(H^+ H - \frac{\nu^2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.44)$$

З останнього виразу впливає зміна масових доданків векторних та скалярних полів.

Новий масовий доданок векторного поля V_μ , а саме $\frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu$ модифікує масову матрицю полів A_μ^3 та V_μ (4.50):

$$M_{A^3, V} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 + \mu^2 \end{pmatrix}, \quad \mu^2 = \frac{4m^2}{v^2}. \quad (7.45)$$

Перехід до масових станів робиться згідно перетворень (4.53):

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_\mu \\ A_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

де θ_W – кут змішування Вайнберга, значення якого модифікується до вигляду, див. (4.58),

$$\tan(2\theta_W) = \frac{2gg'}{g^2 - g'^2} \rightarrow \frac{2gg'}{g^2 - g'^2 - \mu^2}. \quad (7.47)$$

Значення $\tan \theta_W$ можна виразити через $\tan(2\theta_W)$

$$\tan \theta_W = \frac{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta_W)} - 1}{\tan(2\theta_W)}. \quad (7.48)$$

Очевидно, що параметр μ у виразі (7.47) в даній модифікації СМ має бути малим, щоб не суперечити даним спостережень. Тоді розклавши в ряд Тейлора за малим параметром μ та врахувавши першу ненульову поправку, отримаємо

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}(1 + \epsilon), \quad \epsilon = \frac{\mu^2}{g^2 + g'^2} = \frac{4m^2}{v^2} \frac{1}{g^2 + g'^2} \rightarrow 0, \quad (7.49)$$

що узгоджується з раніше отриманим виразом (4.58). Наведемо також значення модифікованих виразів для $\sin \theta_W$ та $\cos \theta_W$ в першому порядку за малим безрозмірним параметром ϵ :

$$\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(1 + \frac{\epsilon g^2}{g^2 + g'^2} \right), \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(1 - \frac{\epsilon g'^2}{g^2 + g'^2} \right). \quad (7.50)$$

Значення для модифікованих мас Z -бозону та фотону можна отримати діагоналізуювши масову матрицю (7.45), отримаємо:

$$M_{\underset{A}{Z}}^2 = \frac{f^2}{8} (g^2 + g'^2) \left(1 + \epsilon \pm \sqrt{1 - 2\epsilon \frac{g^2 - g'^2}{g^2 + g'^2} + \epsilon^2} \right). \quad (7.51)$$

Тоді розклавши в ряд Тейлора за малим параметром μ та врахувавши першу ненульову поправку, отримаємо ненульове значення маси фотона

$$M_\gamma = m \cos \theta_w \approx \frac{v}{2} \mu \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = M_W \sqrt{\epsilon} \quad (7.52)$$

та модифіковане значення маси Z -бозону

$$M_Z \rightarrow \frac{f}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} \right) = M_Z \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \sin^2 \theta_w \right). \quad (7.53)$$

Слід зазначити, що сучасні експериментальні обмеження на масу фотона становлять $M_\gamma < 10^{-18}$ еВ [53]. Тобто в СМ навряд чи реалізується варіант поля Штюкельберга, але він може бути реалізованим у модифікаціях СМ з новими векторними полями.

Лагранжіан (7.44) модифікує також маси скалярних полів. Масова матриця полів ϕ_z та B стає недіагональною та залежить від явного вигляду умов, що фіксують калібрування. Діагоналізація масової матриці призведе до змішування полів ϕ_z та B . Отже якщо в СМ в неунітарному калібруванні були взаємодії частинок СМ з полем ϕ_z , то вони згенерують і взаємодію частинок СМ і з повздовжньою компонентою поля Штюкельберга B .

7.6 Взаємодії за участю поля Штюкельберга

Перше, що потрібно відзначити, є те, що поле Штюкельберга має внутрішню "фейкову" симетрію, див. Розділ 3.7. Тому взаємодія може будуватися напряду з полем Штюкельберга (не потрібно задовольняти вимоги калібрувальної інваріантності до перетворень поля Штюкельберга) і може містити доданки типу $X_\mu j^\mu$, $(X^\mu X_\mu)^2$, $X^\mu X_\mu H^+ H$ і т.д.

Як вже зазначалося, найбільш проблемною з позиції збереження унітарності та перенормування є взаємодія зі струмом компоненти поля Штюкельберга, що являє собою повну похідну $\partial_\mu B/m_X$, де m_X – маса поля Штюкельберга. Розглянемо її детальніше.

Взаємодія зі струмом, що зберігається

У випадку взаємодії поля Штюкельберга $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m_X$ зі струмом, що зберігається, доданком $\partial_\mu B/m_X$ можна знехтувати, оскільки інтегруванням лагранжіана за частинами легко отримати $(\partial_\mu B)j^\mu = B(\partial_\mu j^\mu) = 0$. Так і повинно бути, бо доданок лагранжіана зі взаємодією звичайного векторного поля зі струмом, що зберігається, $A_\mu j^\mu$ має бути інваріантним відносно калібрувальних перетворень $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$, що є очевидним завдяки використанню методу інтегрування за частинами: $\partial_\mu f j^\mu = -f \partial_\mu j^\mu = 0$. Отже, при взаємодії поля Штюкельберга зі струмом, що зберігається, ми можемо записати

$$\mathcal{L}_{int} = g_v X_\mu j^\mu = g_v (V_\mu - \partial_\mu B/m_X) j^\mu = g_v V_\mu j^\mu, \quad (7.54)$$

тобто по зазначеній взаємодії ми не зможемо відрізнити поле Штюкельберга від звичайного векторного поля Прока.

Взаємодія зі струмом, що не зберігається

Розглянемо взаємодію поля Штюкельберга $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m_X$ зі струмом, що не зберігається. Візьмемо для цього аксіальний струм $j_a^\mu = \bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 f$. На класичному рівні ми маємо співвідношення для 4-дивергенції аксіального струму у вигляді (4.139): $\partial_\mu j_a^\mu = 2im_f \bar{f} \gamma^5 f$. Тоді взаємодію поля Штюкельберга можна записати у вигляді

$$\mathcal{L}_{int} = g_a X_\mu j_a^\mu = g_a (V_\mu - \partial_\mu B/m_X) j^\mu = g_a V_\mu j^\mu + g_a \frac{2im_f}{m_X} \bar{f} \gamma^5 f B, \quad (7.55)$$

звідки випливає, що взаємодію з полем B необхідно враховувати.

На перший погляд може скластися враження, що взаємодія поля B з ферміонами є гарною з фізичної точки зору, оскільки описується польовим оператором розмірності 4. Однак, розглянувши взаємодію лише поля B з ферміонами, наприклад, в реакції $XX \rightarrow ff$, ми побачимо, що амплітуда реакції при $s \gg m_X^2, m_f^2$ та при сталому значенні t веде себе як

$$|M_{fi}|^2 = \frac{32g_a^2 m_f^4 s}{m_X^4 (m_f^2 - t)} + \dots, \quad (7.56)$$

де опущені доданки, що повільніше зростають при зростанні s . Легко побачити, що при певному значенні змінної Мандельштама s величина $|M_{fi}|^2$ стане більшою за 1 і умова унітарності буде порушеною [77]. Відповідно, вище порогового значення $s \gtrsim s_{max} = m_X^4 / (32g_a^4 m_f^2)$ теорія втрачає фізичний сенс, отже, вона може бути ефективно застосована лише у відповідному низькоенергетичному масштабі. Це говорить про те, що у фізично коректному лагранжіані має бути побудована взаємодія поля Штюкельберга з декількома аксіальними струмами так, щоб при великих значеннях s амплітуди типу (7.56) взаємно скорочувалися.

Корисно відзначити, що взаємодія поля Штюкельберга X^μ з аксіальним струмом також міститься у взаємодії полів Хігса з X^μ (оператор розмірності 4):

$$iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H X^\mu. \quad (7.57)$$

Нагадаємо, що за визначенням $H^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H = H^\dagger (D_\mu H) - (D_\mu H^\dagger) H$, де D_μ – подовжена похідна, що включає калібрувальні поля групи слабого ізоспіну $SU_W(2)$ та гіперзаряду $U_Y(1)$. Саме ж поле Штюкельберга не змінюється при калібрувальних перетвореннях.

Зосередимось на взаємодії повздовжньої частини поля Штюкельберга:

$$iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H X_L^\mu \rightarrow -iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H \frac{\partial^\mu B}{m_X}. \quad (7.58)$$

Застосувавши інтегрування частинами, запишемо останній вираз як

$$i \frac{B}{m_X} \partial^\mu (H^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H) = i \frac{B}{m_X} [H^\dagger D^2 H - (D^2 H^\dagger) H], \quad (7.59)$$

де в останньому виразі ми замінили частинну похідну на коваріантну, оскільки доданки з калібрувальними полями зануляться під дією

оператора $\overleftrightarrow{D}$. Використавши рівняння руху хіггсівського поля, отримаємо зв'язок поля B з псевдоскалярним струмом, що пропорційний юкавівським сталим зв'язку¹:

$$\rightarrow -i \frac{B}{m_X} (\bar{f}_L Y^f f_R - \bar{f}_R Y^{\dagger, f} f_L) \frac{(v+h)}{\sqrt{2}}. \quad (7.60)$$

Ми можемо провести процедуру діагоналізації матриць Юкави так, щоб їхні значення були дійсними та додатними, та отримаємо

$$\rightarrow -i Y^{diag, f} \frac{(v+h)}{\sqrt{2}} \frac{B}{m_X} (\bar{f} \gamma_5 f). \quad (7.61)$$

Отже, взаємодія з полем Хіггса (7.57) буде містити в собі взаємодію аксіального струму з полем Штюкельберга X_μ , що дасть відповідне зростання амплітуди реакції зі збільшенням енергії взаємодіючих частинок.

Хоча взаємодії $X_\mu \bar{f} \gamma^\mu \gamma_5 f$ та $i H^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H X^\mu$ окремо призводять до амплітуд, що зростають зі зростанням енергії, можна підібрати таку комбінацію цих доданків (коефіцієнтів α та β), яка не буде зростати при збільшенні енергії частинок. Тобто загальний коефіцієнт при аксіальному струмі має бути виду [66, 195]:

$$\mathcal{L}_{int} = X_\mu (\alpha \bar{f} \gamma^\mu \gamma_5 f + i \beta H^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H) \sim$$

$$i \sum_f \frac{y_f (v+h)}{\sqrt{2} m_X} \left((Y_{f_R} - Y_{f_L}) \pm Y_H \right) B (\bar{f} \gamma_5 f) + \dots, \quad (7.62)$$

де Y_{f_L}, Y_{f_R} – гіперзаряди правих та лівих ферміонів (f_L та f_R) відповідно, Y_H – гіперзаряд поля Хіггса, а знак $+$ ($-$) відповідає випадку лептонів та нижніх (верхніх) кварків. Комбінація гіперзарядів, що входить у зазначений вираз, задовольняє інваріантність лагранжіану СМ відносно калібрувальних перетворень групи $U_Y(1)$ та дорівнює нулю.

¹Наведені вирази справедливі для лептонів та нижніх кварків (лагранжіан юкавівської взаємодії через поле H , а не $\tilde{H}$, див. (4.11)). Але вирази можна узагальнити і для верхніх кварків.

Взаємодія з полем Хіггса

На перенормовному рівні існує лише один доданок взаємодії поля Хіггса з полем Штюкельберга X^μ :

$$\frac{1}{2}\lambda_2|H|^2X_\mu X^\mu, \quad (7.63)$$

де λ_2 – безрозмірна стала взаємодії. Тоді поле Хіггса в околі стану з мінімумом потенціалу даватиме додатковий внесок в масу Штюкельберговського векторного поля і призведе до її перевизначення:

$$\tilde{m}_X^2 = m_X^2 + \frac{\lambda_2 v^2}{2}. \quad (7.64)$$

Взаємодія повздовжньої компоненти поля Штюкельберга з полем Хіггса буде визначатися виразом

$$\frac{1}{2}\lambda_2|H|^2X_\mu X^\mu \rightarrow \frac{1}{2\tilde{m}_X^2}\lambda_2|H|^2(\partial_\mu B\partial^\mu B), \quad (7.65)$$

що породжує оператори взаємодії повздовжньої моди B з полем Хіггса розмірності 5 та 6:

$$\frac{\lambda_2(2vh + h^2)}{2\tilde{m}_X^2}(\partial_\mu B\partial^\mu B). \quad (7.66)$$

Така взаємодія призведе до зростання амплітуд реакцій при зростанні енергій взаємодіючих частинок як $\sqrt{s}/m_X$. Явний розрахунок реакції $XX \rightarrow hh$ та накладання умови унітарності у вигляді $|\mathcal{M}|^2 = 1$ призводить до максимального порогового значення енергії взаємодіючих частинок у вигляді $\sqrt{s_{\max}} \sim \tilde{m}_X \sqrt{2/\lambda_2}$, що визначатиме межі застосовності такої взаємодії. Зазначимо, що у частковому випадку, коли основним внеском в масу X^μ є внесок від доданка пропорційного λ_2 (тобто $\tilde{m}_X^2 \simeq \lambda_2 v^2/2$), порогове значення $\sqrt{s_{\max}} \sim v$ визначається масштабом електрослабкої взаємодії та не залежить від маси поля Штюкельберга.

Оператор (7.63) генерує додаткову масу векторного поля Штюкельберга за аналогією до того, як генерується маса векторного поля групи $U(1)$ в механізмі Хіггса. Замість λ_2 в останньому випадку буде g^2 , де g – відповідна стала зв'язку. Відповідно, можна очікувати, що стала λ_2 буде мати додатне значення, що є важливим при визначенні маси поля Штюкельберга у формі (7.63).

Самодія поля Штюкельберга

Існує лише один перенормований оператор самодії поля Штюкельберга. Він має розмірність 4:

$$\frac{1}{4!}\lambda_4(X_\mu X^\mu)^2, \quad (7.67)$$

де λ_4 – безрозмірна стала. Однак для повздовжньої компоненти матимемо вже оператор розмірності 8:

$$\frac{\lambda_4}{4!m_X^4}(\partial_\mu B\partial^\mu B)^2, \quad (7.68)$$

що призводить до зростання амплітуди розсіяння квантів поля Штюкельберга зі збільшенням енергії частинок за законом

$$\mathcal{A}(X_L X_L \rightarrow X_L X_L) \sim \lambda_4 \frac{s^2}{m_X^4}. \quad (7.69)$$

В цьому місці корисно відмітити, що ріст амплітуди за законом s^2/m_X^4 відбувається і в СМ для реакцій з 4-частинковою взаємодією W -бозонів. Однак, в СМ відповідне зростання амплітуди реакцій компенсується врахуванням діаграм з обміном Z -бозонів та бозоном Хіггса h [77].

Межі застосовності теорії з оператором взаємодії (7.67) можна оцінити з виразу (7.69): прирівнявши амплітуду процесу до 1, отримаємо:

$$\sqrt{s_{\max}} \lesssim \frac{m_X}{\lambda_4^{1/4}}, \quad (7.70)$$

що накладає сильні обмеження на значення параметра $\lambda_4 \ll 1$. Зазначимо, що стала λ_4 має бути додатною, щоб забезпечити аналітичність теорії при високих енергіях [112].

Взаємодія із аномальним струмом

Як відомо, повний вираз для 4-дивергенції аксіального струму має вигляд (4.140), див. [63, 67, 68]:

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2im_f \bar{\psi}\gamma^5\psi - \frac{q^2}{8\pi^2} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}, \quad (7.71)$$

де $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ є дуальним тензором до тензора $F_{\alpha\beta}$, а останній доданок являє собою похідну від аномального струму

$$\frac{q^2}{8\pi^2} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{q^2}{8\pi^2} \partial_\mu j_{CS}^\mu, \quad (7.72)$$

де $j_{CS}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} V_\nu F_{\lambda\rho}$ (скорочення CS походить від того, що такий струм називають струмом Черна-Саймонса або аномальним струмом). Зазначимо, що останній доданок походить з розгляду трикутних петльових діаграм взаємодії векторних полів і відсутній в класичній теорії полів. Доданок $F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}$ в літературі називають також густиною Черна-Понтрягіна [66].

Взаємодія поля Штюкельберга з аномальним струмом призведе до появи доданку

$$\mathcal{L}_{int} = g_a X_\mu j_{CS}^\mu = \dots - g_a \frac{B}{m_X} \partial_\mu j_{CS}^\mu = \frac{q^2 g_a}{8\pi^2} \frac{B}{m_X} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} + \dots, \quad (7.73)$$

Останній доданок у виразі (7.73) має назву доданка Печей-Куїна і являє собою оператор розмірності 5. Відповідно, зазначена взаємодія не є перенормовною.

Розглянемо лагранжіан, в якому калібрувальне поле V_μ (складова частина поля Штюкельберга $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m_X$) взаємодіє з аксіальним ферміонним струмом $\bar{f}\gamma^\mu\gamma^5 f$ зі сталою взаємодії g_a , а також в системі існує векторне калібрувальне поле A_μ , що взаємодіє з векторним ферміонним струмом $\bar{f}\gamma^\mu f$ зі сталою взаємодії q . Як відомо, в цьому випадку через трикутну ферміонну петлю буде генеруватися взаємодія полів AAV і у вершині ферміонної трикутної петлі з полем V_μ закон збереження аксіального струму матиме аномальний доданок. В імпульсному просторі, якщо імпульс кванта поля V_μ дорівнює p , імпульс одного з векторних полів – q , а петлі відповідає функція $\Delta^{\rho\mu\nu}$ (петля має три лоренцеві індекси, бо за ними відбуватиметься згортка

з лоренцевими індексами векторних полів A_ρ, A_ν, V_μ), останній факт буде виражатися рівністю (див. детальніше [67, 196])

$$p_\mu \Delta^{\rho\mu\nu} = \frac{q^2 g_a}{2\pi^2} \epsilon^{\rho\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \quad (7.74)$$

Якщо ж тепер врахувати наявність взаємодії повздовжньої компоненти поля Штюкельберга у вигляді (7.73), то можна також побудувати взаємодію AAB через трикутну ферміонну петлю. Петлі в цьому випадку буде відповідати величина $\Delta^{\rho\nu}$ (два індекси, бо за ними відбуватиметься згортка з лоренцевими індексами векторних полів A_ρ та A_ν). Аномальний закон збереження аксіального струму в цьому випадку буде наслідком рівності

$$im_X \Delta^{\rho\nu} = \frac{q^2 g_a}{2\pi^2} \epsilon^{\rho\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \quad (7.75)$$

Як бачимо, праві частини виразів (7.74), (7.75) збігаються. Це дозволяє записати узагальнений вираз для тотожності Уорда у вигляді

$$p_\mu \Delta^{\rho\mu\nu}(V) - im_X \Delta^{\rho\nu}(B) = 0. \quad (7.76)$$

Таким чином, наявність взаємодії поля Штюкельберга з аномальним струмом (7.73) призводить до скорочення квантової аномалії. Це явище має назву механізму скорочення аномалії Гріна-Шварца [197].

7.7 Портал псевдоскалярів. Аксіони та аксіоноподібні частинки

Аксіони – частинки, що можуть вирішити проблему СР-інваріантності КХД

Аксіони були вперше запропоновані як гіпотетичні псевдоскалярні частинки в 1977 році. По суті вони були псевдоголдстоунівськими бозонами, що утворювалися при спонтанному порушенні симетрії Печчеї-Куїна (6.27). На класичному рівні аксіони були введені як безмасові частинки, що набувають масу за рахунок квантових ефектів. Метою їх введення було вирішення проблеми СР-інваріантності сильної взаємодії в СМ [198, 199]. Розглянемо дане питання детальніше.

Як вже зазначалося в Розділі 6.1, сталим θ , що визначає міру порушення СР-інваріантності сильної взаємодії, можна було б занулити за умови наявності симетрії відносно глобальних перетворень Печчеї-Куїна (PQ) (6.27). Однак ця симетрія явно порушується масовими доданками лагранжіану кварків.

Для вирішення проблеми СР-інваріантності КХД Печчеї та Куїна запропонували модифікувати кварковий лагранжіан шляхом додавання нової $U_{PQ}(1)$ глобальної симетрії. Для цього фазу θ_q в (6.25) в масових доданках кваркових полів було запропоновано вважати новим полем (аксіонне поле) з нульовим спіном, що не є константою, а може змінюватися

$$\mathcal{L}_m = m_q (\bar{q}_R e^{-i \frac{A}{f_{PQ}}} q_L + \bar{q}_L e^{i \frac{A}{f_{PQ}}} q_R) = m_q \bar{q} e^{i \gamma_5 \frac{A}{f_{PQ}}} q. \quad (7.77)$$

Застосувавши до кваркових полів глобальні PQ-перетворення (6.27),

$$q_R \rightarrow q_R e^{i\alpha}, \quad q_L \rightarrow q_L e^{-i\alpha}, \quad (7.78)$$

отримаємо

$$\mathcal{L}_m \rightarrow m_q \bar{q} e^{i \gamma_5 \left[\frac{A}{f_{PQ}} + 2\alpha \right]} q. \quad (7.79)$$

Легко побачити, що для відновлення глобальної PQ-симетрії лагранжіану нам слід вимагати, щоб при глобальних калібрувальних перетвореннях кваркових функцій (6.27) поле аксіонів перетворювалося як

$$A \rightarrow A' = A - 2f_{PQ} \alpha. \quad (7.80)$$

Фактично ми просто робимо перепозначення, яке не змінить лагранжіану. Зсув на сталу значення аксіонного поля не змінить його кінетичних доданків, масового доданку це поле поки не має, отже окрім показника експоненти в (7.77) аксіонне поле більше нікуди не входить.

Утворений таким лагранжіан буде інваріантним відносно **глобальних RQ-перетворень** кваркових полів за умови, що відповідним чином буде змінюватися і фаза скалярного поля

$$q_R \rightarrow q_R e^{i\alpha}, \quad q_L \rightarrow q_L e^{-i\alpha}, \quad A \rightarrow A' = A - 2f_{PQ} \alpha. \quad (7.81)$$

За рахунок кіральних перетворень кваркових полів в лагранжіані КХД буде згенеровано доданок $\sim \alpha \tilde{G}^{a, \mu\nu} G_{\mu\nu}^a$, що призведе до зміни значення $\theta \rightarrow \theta - 2N_a \alpha$ (6.27). Оскільки параметр α може бути довільним, то значення параметра θ стає нефізичним і може бути покладене нулю.

Розглянемо тепер, як таке аксіонне поле та фаза θ_q у масовій частині кваркового поля можуть природнім чином з'явитися в нашій теорії. Введемо певне комплексне скалярне поле, що взаємодіятиме з безмасовими кварковими полями як

$$\mathcal{L}_{int} \sim (\bar{q}_R \varphi q_L + \bar{q}_L \varphi^* q_R). \quad (7.82)$$

Вважатимемо, що скалярне поле φ має потенціал типу потенціалу Хігса, а симетрія системи спонтанно порушується на масштабі f_{PQ}

$$V(\varphi) = \lambda(|\varphi|^2 - f_{PQ}^2/2)^2 \Rightarrow \langle \varphi \rangle = (f_{PQ}/\sqrt{2}) e^{-i\theta_q - iA/f_{PQ}}, \quad (7.83)$$

де фаза $A = A(x)$ є полем аксіонів (безмасовий псевдоголдстоунівський бозон¹), а θ_q – фаза точки вакуумного стану скалярного поля, збурення навколо якого генерують масивне поле Хігса. Зазначене скалярне поле генерує масу кварків, див. (6.24) та (6.25).

При локальних RQ-перетвореннях кваркових полів, зміна їх фази призведе до зміни кінетичних доданків кваркових полів. Тому проста зміна фази скалярного поля φ (зміщення поля аксіона A) не забезпечить RQ-інваріантності лагранжіану. Для забезпечення локальної

¹Як побачимо далі, аксіон є масивною псевдоскалярною частинкою, тому ми використали назву псевдоголдстоунівського бозону. Він набуває масу за рахунок квантових ефектів.

RQ-інваріантності в цьому випадку необхідно вводити нове векторне калібрувальне поле, яке набуде маси і поглине псевдоголдстоунівський бозон A , як у механізмі Хіггса.

Автори теорії запропонували не змінювати фазу скалярного поля φ (не зміщувати поле аксіона A) при локальних RQ-перетвореннях ферміонних полів та не вводити нове калібрувальне векторне поле. Це очевидно порушить локальну RQ-інваріантність лагранжіану, але збереже аксіонне поле, як окреме фізичне поле в системі.

Для того щоб позбутися фазового множника у масовому доданку кваркових полів (7.77) потрібно провести локальні перетворення ферміонних полів (6.27) з параметром $\alpha = -A/(2f_{PQ})$, що призведе до появи в лагранжіані доданку, див. (6.28),

$$\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD} + C \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{A}{f_{PQ}} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (7.84)$$

де C – в загальному випадку певний коефіцієнт, що визначається зарядами кварків окремих поколінь по відношенню до RQ-перетворень та кількістю кварків. Справа в тому, що в загальному випадку різні кварки можуть мати різні RQ-заряди, що нами, для спрощення ситуації, не розглядалося. Якщо всі кварки мають заряди 1, то $C = N_q$.

Зміна лагранжіану (7.84) призведе до зміни параметра $\bar{\theta}$ до вигляду, що визначатиметься полем аксіона

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}_{eff} = \bar{\theta} + C \frac{A}{f_{PQ}}. \quad (7.85)$$

Виявляється, що в результаті порушення кіральної симетрії на масштабі близькому до масштабу сильної взаємодії $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV, з'являється ненульовий вакуумний конденсат, $\bar{q}q \sim \lambda_{QCD}^3$, що приводить до ефективного потенціалу вакууму КХД. За рахунок наявності інстантонних розв'язків ефективний потенціал стає функцією параметра $\bar{\theta}$ з мінімумом в точці $\bar{\theta}_{eff} = 0$ [75, 200]:

$$V_a \sim (1 - \cos \bar{\theta}_{eff})|_{\bar{\theta}_{eff}=0} = -\frac{1}{2} \bar{\theta}_{eff}^2 \frac{m_u m_d}{m_u + m_d} + O(\bar{\theta}^4) \approx \frac{1}{8} \bar{\theta}_{eff}^2 m_\pi^2 f_\pi^2 + O(\bar{\theta}^4), \quad (7.86)$$

де $m_\pi \approx 135$ MeV – маса π -мезона, $f_\pi \approx 130,7$ MeV – стала розпаду π -мезона. Очевидно, що мінімум енергії система отримує в точці, коли $\bar{\theta}_{eff} = 0$, що автоматично пояснює експериментальний факт $\bar{\theta}_{eff} \rightarrow$

0. Значення $\bar{\theta}_{eff} = 0$ означає, що середнє значення аксіонного поля $\langle A \rangle = -\bar{\theta}_{eff} \frac{f_{PQ}}{C}$ динамічно підлаштовуватиметься для забезпечення мінімуму потенціалу системи.

Записавши потенціал у вигляді

$$V_a \approx \frac{1}{8} \left(C \frac{A}{f_{PQ}} \right)^2 m_\pi^2 f_\pi^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C m_\pi f_\pi}{2 f_{PQ}} \right)^2 A^2 = \frac{m_A^2 A^2}{2}, \quad (7.87)$$

отримуємо вираз для маси аксіона, див. також [142],

$$m_A = C \frac{m_\pi f_\pi}{2 f_{PQ}} \approx C \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{eV} \frac{10^{12} \text{GeV}}{f_{PQ}}. \quad (7.88)$$

Звертаємо увагу, що наслідком вирішення проблеми СР-інваріантності в КХД стала поява в лагранжіані СМ аксіонного поля, яке не можна усунути ніякими калібрувальними перетвореннями. Це поле є одним з кандидатів на роль поля темної матерії. Для того, щоб аксіони могли претендувати на роль частинок темної матерії і не суперечили даним космологічних спостережень їх маса має бути в інтервалі $10^{-6} - 10^{-5}$ еВ [75, 142, 201].

Розглянемо приклади введення аксіонів в СМ.

Для початку розглянемо введення ALP за допомогою моделі з двома полями Хіггса. Задамо собі питання, як нам коректно можна сгенерувати доданок (7.77)? В СМ масові доданки кварків виникають завдяки взаємодії кваркових полів з полем Хіггса (4.11). Для виникнення глобальної PQ-симетрії необхідно припустити, що поле Хіггса заряджено відносно групи $U_{PQ}(1)$. Тоді, для інваріантності відносно перетворень (6.27), поле Хіггса має перетворюватися відносно групи $U_{PQ}(1)$ наступним чином

$$inv_{PQ}(\bar{Q}_m H D_n) \Rightarrow H \rightarrow H e^{-i2\alpha}, \quad (7.89)$$

$$inv_{PQ}(\bar{Q}_m \tilde{H} U_n) \Rightarrow H \rightarrow H e^{+i2\alpha}. \quad (7.90)$$

Маємо протиріччя. Щоб виправити ситуацію потрібно модифікувати СМ введенням другого поля Хіггса, щоб вираз (4.11) отримав вигляд

$$\mathcal{L}_Y = - \left(Y_{mn}^l \bar{L}_m H_1 E_n + Y_{mn}^d \bar{Q}_m H_1 D_n + Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H}_2 U_n + h.c. \right), \quad (7.91)$$

а відповідні поля Хіггса (H_1 та H_2) мали ті ж самі заряди по групам СМ, що й звичайне поле Хіггса, а їх заряди відносно RQ-перетворень були різними

$$H_1 \rightarrow H_1 e^{-i2\alpha}, \quad H_2 \rightarrow H_2 e^{+i2\alpha}. \quad (7.92)$$

Враховуючи, що поле Хіггса взаємодіє з лептонами, то RQ-перетворення повинні діяти і на лептонні поля.

Кінетичні доданки в теорії з двома полями Хіггса матимуть вигляд

$$(D^\mu H)^+ D_\mu H \rightarrow (D^\mu H_1)^+ D_\mu H_1 + (D^\mu H_2)^+ D_\mu H_2, \quad (7.93)$$

що призведе до заміни вакуумного середнього в масових доданках калібрувальних полів (4.49): $v^2 \rightarrow v_1^2 + v_2^2$. Параметр v фіксується в СМ, оскільки входить, наприклад, у визначення мас W , Z бозонів та сталої Фермі G_F . Отже на параметри v_1 , v_2 буде існувати обмеження $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 246.22 \text{ Гев}$ (4.115).

Нехай поля Хіггса поблизу вакуумного стану, відносно групи $U_{PQ}(1)$, матимуть вигляд¹

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{i2\frac{A}{f_{PQ}}}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-i2\frac{A}{f_{PQ}}}. \quad (7.94)$$

Тоді гола кінетична частина полів Хіггса дає

$$\mathcal{L}_{kin} = (\partial^\mu H_1)^+ \partial_\mu H_1 + (\partial^\mu H_2)^+ \partial_\mu H_2 = 2 \frac{v_1^2 + v_2^2}{f_{PQ}^2} \partial^\mu A \partial_\mu A. \quad (7.95)$$

Вважаючи $f_{PQ} = 2\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2v$, отримаємо стандартний вираз кінетичного доданку нейтрального псевдоскалярного поля аксіона

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2} \partial^\mu A \partial_\mu A. \quad (7.96)$$

Перетворення (6.27) з аксіонним полем в показнику експоненти призведе до зміни кінетичних доданків ферміонних² полів

¹Розклавши експоненту в ряд $e^{i2\rho} = 1 + 2i\rho$, отримаємо звичний вираз для поля в околі вакуумного стану.

²Лептонних та кваркових полів згідно з інваріантністю до RQ-перетворень лагранжіана (7.94).

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &\rightarrow i\bar{\psi}e^{i\gamma_5 C_\psi \frac{A}{f_{PQ}}} \gamma^\mu \partial_\mu e^{i\gamma_5 C_\psi \frac{A}{f_{PQ}}} \psi = \\
&= i\bar{\psi}e^{i\gamma_5 C_\psi \frac{A}{f_{PQ}}} e^{-i\gamma_5 C_\psi \frac{A}{f_{PQ}}} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{2C_\psi}{f_{PQ}} \partial_\mu A \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \psi = \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{2C_\psi}{f_{PQ}} \partial_\mu A \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \psi, \quad (7.97)
\end{aligned}$$

котрі³ нам дадуть явний вигляд взаємодії аксіону з лептонами та кварками, де C_ψ – заряд відповідного ферміона по групі $U_{PQ}(1)$ (в загальному випадку не одиничний). Як бачимо, ця взаємодія задається оператором розмірності 5, що робить її неперенормовною, а теорію аксіону робить ефективною теорією. З явного вигляду наведених взаємодій також випливає, що **поле аксіонів є псевдоскалярним полем**.

Зробивши перетворення кваркових та лептонних функцій у масових частинах лагранжіану типу (7.77) ми отримаємо в лагранжіані доданки

$$C_G \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{A}{f_{PQ}} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + C_\gamma \frac{\alpha}{8\pi} \frac{A}{f_{PQ}} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (7.98)$$

тобто взаємодію аксіонів з глюонними та електромагнітними полями.

Підсумовуючи, в даному розширенні СМ окрім появи двох бозонів поля Хіггса виникають такі нові доданки аксіонного поля

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial^\mu A \partial_\mu A - \frac{m_A^2}{2} A^2 + C_G \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{A}{f_{PQ}} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + C_\gamma \frac{\alpha}{8\pi} \frac{A}{f_{PQ}} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \\
- \frac{2C_\psi}{f_{PQ}} \partial_\mu A \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \psi, \quad (7.99)
\end{aligned}$$

де ψ кваркові та лептонні поля СМ.

Вкажемо тепер на недоліки наведеної моделі. Підставивши значення $f_{PQ} = 2v$ у вираз (7.88), отримаємо значення для маси аксіона $m_a \approx 15$ KeV, що значно перевищує необхідне значення маси аксіона як кандидата на роль частинки темної матерії. З виразу (7.91) випливає, що аксіон взаємодіє як з кварками, так і з лептонами, але ця взаємодія пропорційна фактору $1/f_{PQ} = 1/(2v)$, див. (7.97), що не є надзвичайно малим. В той же час, така взаємодія в експериментах не

³Ми використали факт $\gamma^\mu e^{i\gamma_5 C_\psi \frac{A}{f_{PQ}}} = e^{-i\gamma_5 C_\psi \frac{A}{f_{PQ}}} \gamma^\mu$.

спостерігається. Отже, такий аксіон (називають *аксіоном Вайнберга-Вільчека*, [202, 203]) є експериментально забороненим.

Модель Дайна-Фішлера-Средницького-Житницького (ДФСЖ-, або DFSZ-аксіон), див. [204, 205], вирішує проблеми моделі аксіона Вайнберга-Вільчека. В цій моделі окрім наявності другого бозону Хіггса пропонується додати комплексний скаляр S , що незаряджений по калібрувальним групам СМ, але заряджений по групі $U_{PQ}(1)$.

В даній моделі, окрім $U_{PQ}(1)$ -інваріантних комбінацій $H_1^+ H_1$, $H_2^+ H_2$, $H_1^+ H_2 \cdot H_2^+ H_1$, $S^+ S$, також входить $H_1^+ H_2 \cdot S^2$ та ермітово спряжена до неї $H_2^+ H_1 \cdot S^{*2}$. Умовою інваріантності останніх відносно глобальних $U_{PQ}(1)$ перетворень є $S \rightarrow S e^{i2\rho}$. Припустимо також, що скалярне поле знаходиться в околі свого вакуумного стану після спонтанного порушення симетрії, тобто $S = \frac{v_s}{\sqrt{2}} e^{i2A/f_{PQ}}$, де A – поле аксіону.

Тоді з (7.93) впливає умова $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 246.22$ ГеВ, а кінетичні доданки дають

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin} &= (\partial^\mu H_1)^+ \partial_\mu H_1 + (\partial^\mu H_2)^+ \partial_\mu H_2 + (\partial^\mu S)^+ \partial_\mu S = \\ &= 2 \frac{v_1^2 + v_2^2 + 4v_s^2}{f_{PQ}^2} \partial^\mu A \partial_\mu A. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Вважаючи $f_{PQ} = 2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 4v_s^2} = 2\sqrt{v^2 + 4v_s^2}$, отримаємо стандартний вираз кінетичного доданку нейтрального псевдоскалярного поля аксіона (7.96). На вакуумне середнє v_s немає жодних обмежень, а значить, воно може приймати досить великі значення. Отже, масу аксіона (7.88) та сталу зв'язку аксіона з кварками та лептонами ($\sim 1/f_{PQ}$) можна зробити як завгодно малими.

Доданки взаємодії аксіонного поля з полями СМ матимуть вигляд (7.99).

Зазначимо також, що теорія з двома дублетами полів Хіггса не є експериментально забороненою, див. наприклад [206, 207]. Тому модель DFSZ-аксіона є робочою моделлю.

Модель Кіма-Шифмана-Вайнштейна-Захарова (КШВЗ-, або KSVZ-аксіон), див. [208, 209], також вирішує проблеми моделі аксіона Вайнберга-Вільчека, але іншим способом, що не вимагає введення додаткового дублету поля Хіггса.

Замість другого дублету поля Хігса в моделі КШВЗ водиться новий кварк ψ , що заряджений лише відносно групи $U_{PQ}(1)$ та $SU_C(3)$, при цьому кварки СМ не заряджені відносно групи $U_{PQ}(1)$. Також вводиться нове скалярне поле¹ S , що незаряджене по калібрувальним групам СМ, але заряджене відносно групи $U_{PQ}(1)$.

Це дозволить записати додатковий доданок в СМ

$$\mathcal{L} = y_\psi S \bar{\psi}_R \psi_L + h.c., \quad (7.101)$$

що забезпечуватиме інваріантність відносно глобальних PQ-перетворень: $\psi_R \rightarrow \psi_R e^{-i\alpha}$, $\psi_L \rightarrow \psi_L e^{+i\alpha}$, $S \rightarrow S e^{i2\alpha}$.

Припустимо також, що скалярне поле знаходиться в околі свого вакуумного стану після спонтанного порушення симетрії, тобто $S = \frac{v_s}{\sqrt{2}} e^{i2A/f_{PQ}}$, де A – поле аксіону. За допомогою локальних PQ перетворень ми переведемо фазовий множник скалярного поля з полем аксіона у доданок лагранжіану

$$\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD} + \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{A}{f_{PQ}} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \quad (7.102)$$

Звичайно, при таких перетвореннях змінять свій вигляд кінетичні доданки кваркового поля ψ , див. (7.97), що призведе до появи взаємодії кваркового поля ψ з полем аксіону, але її складно буде спостерігати. Зазначимо, що маса поля ψ визначатиметься вакуумним середнім скалярного поля v_s і може бути досить великою, що пояснювало б відсутність реєстрації відповідних кварків в експериментах. Маса аксіона, навпаки, може бути досить малою

$$\mathcal{L}_{kin} = (\partial^\mu S)^\dagger \partial_\mu S = 2 \frac{v_s^2}{f_{PQ}^2} \partial^\mu A \partial_\mu A, \quad (7.103)$$

тобто $m_A \sim 1/f_{PQ}$, $f_{PQ} = 2v_s$.

Взаємодія аксіонів з кварками, лептонами СМ та електромагнітним полем в моделі КШВЗ відсутня.

¹Ферміони СМ не мають зарядів відносно PQ-перетворень, друге поле Хігса не вводиться! До СМ лише додаються новий кварк та нове скалярне поле (важкі частинки, що не спостерігаються експериментально)!

Аксіоноподібні частинки

Окрім аксіонів, що визначаються вище наведеною теорією, можуть існувати інші псевдоскалярні частинки (не обов'язково з малою масою), що можуть описуватися іншими теоретичними моделями. Такі частинки отримали назву аксіоноподібних частинок (ALP – axion-like particle). Інтерес до ALP пов'язаний з тим, що вони виникають в будь-якій теорії струн, а також в будь-якій теорії зі спонтанним порушенням глобальної симетрії, див. роботу [174] та посилання в ній.

Для того, щоб лагранжіан залишався скалярною функцією, взаємодія ALP з частинками СМ (після спонтанного порушення симетрії поля Хіггса) має містити псевдоскалярні доданки, доданки аксіальних струмів або дуальні тензорні величини [173]. Відповідно, ми можемо записати

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ALPSM}} = & \sum_f \frac{C_{Af}}{2f_A} \bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 f \partial_\mu A - \\ & - \frac{\alpha}{8\pi} \frac{C_{A\gamma}}{f_A} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} A - \frac{\alpha_3}{8\pi} \frac{C_{AG}}{f_A} G_{\mu\nu}^b \tilde{G}^{b\mu\nu} A + \dots, \quad (7.104) \end{aligned}$$

де A – ALP частинка, f_A – певний новий енергетичний масштаб в теорії аксіонів, $f = \{q, \ell, \nu\}$, $q = \{u, d, s, c, b, t\}$, $\ell = \{e, \mu, \tau\}$, $F_{\mu\nu}$ – тензор напруженостей електромагнітного поля, $G_{\mu\nu}^b$ – тензор напруженостей полів КХД. Тобто, в загальному випадку, дане розширення СМ містить 15 нових параметрів: 12 значень C_{Af} ; нові сталі зв'язку з векторними полями СМ $C_{A\gamma}$, C_{AG} та новий масштабний параметр f_A .

Зазначимо, що за допомогою співвідношення (4.139), що справедливе для частинок на масовій поверхні, можна альтернативно записати перший доданок виразу (7.104) у вигляді¹

$$\bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 f \partial_\mu A = -\partial_\mu (\bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 f) A = -2im_f \bar{f} \gamma^5 f A. \quad (7.105)$$

Якщо ж розглядати взаємодію ALP на рівні СМ до спонтанного порушення симетрії (тобто з калібрувальною інваріантністю відносно груп $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$), то її можна схематично записати [174]

¹В загальному випадку слід використовувати співвідношення (4.140).

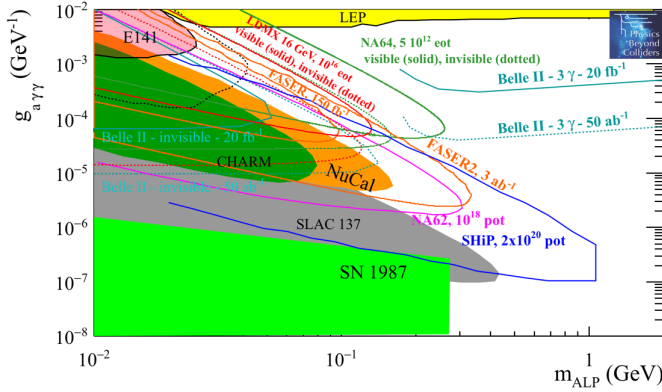


Рис. 46: Обмеження на параметр $g_{a\gamma\gamma}$ аксіон-фотон-фотонної взаємодії. Зафарбовані області відповідають вже виключеним параметрам моделі. Наведені контури області чутливості для майбутніх експериментів. Рис. взято з [176].

за допомогою доданків мінімальної розмірності 5 у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ALPSM}} = & c_G \frac{g_s^2}{16\pi^2} \frac{A}{f_A} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu, a} + c_W \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{A}{f_A} V_{\mu\nu}^i \tilde{V}^{\mu\nu, i} + \\ & + c_B \frac{g'^2}{16\pi^2} \frac{A}{f_A} B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu A}{f_A} \sum_i \frac{c_i}{2} \bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_i. \end{aligned} \quad (7.106)$$

Звичайно, в низькоенергетичному наближенні лагранжіан (7.106) має перейти в лагранжіан (7.104), що й дозволить пов'язати між собою сталі зв'язку одного та іншого лагранжіанів.

На жаль, лагранжіани (7.104) та (7.106) містять оператори розмірності 5 і є неперенормовними. Однак вони можуть бути використані як ефективні лагранжіани для пошуку проявів ALP.

Як бачимо, взаємодія аксіонів з частинками СМ містить досить багато невідомих сталих. Для прикладу, наведемо існуючі обмеження на сталу взаємодії $g_{a\gamma\gamma}$ аксіона з двома фотонами $\frac{\alpha}{8\pi} \frac{C_{A\gamma}}{f_A} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4}$ в моделі, де ця взаємодія (стала зв'язку) є домінуючою, див. Рис.46.

Зазначимо, що важливим процесом для народження аксіонів у

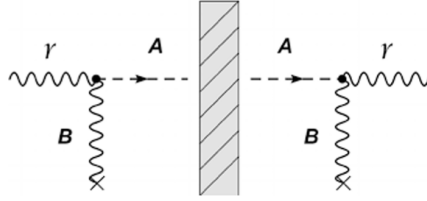


Рис. 47: Ефект Примакова: фотон-аксіонні перетворення у зовнішньому магнітному полі

фотонно-домінуючій моделі є *ефект Примакова* [210]: перетворення фотона в аксіон в зовнішньому полі, див. Рис.47. Фактично це будуть фотон-аксіонні осциляції у зовнішньому полі. Зокрема, фотон з енергією E , що проходить у вакуумі в постійному магнітному полі B шлях L , має ймовірність перетворення у аксіон з масою m_A , що дорівнює

$$P_{A \rightarrow \gamma} = \left(\frac{g_{a\gamma} B_{\perp} L}{2} \right)^2 \left[\frac{\sin(qL/2)}{qL/2} \right]^2, \quad q = \frac{m_A^2}{2E}. \quad (7.107)$$

При цьому у даний вираз входить лише компонента магнітного поля $B_{\perp}$, що перпендикулярна до напрямку розповсюдження фотона. Відмітимо також, що $P_{A \rightarrow \gamma} = P_{\gamma \rightarrow A}$.

З зазначеного ефекту зокрема впливає, що в зонішньому полі фотон може проходити крізь непрозору перешкоду (стінку): перед стінкою він перетворюється в аксіон, який легко проходить через перешкоду, а після стінки аксіон знову перетворюється у фотон, див. [211].

Для лабораторних експериментів беручи значення $g_{a\gamma} = 10^{-10 \dots -11} \text{ GeV}^{-1}$, $B = 10 \text{ Тесла}$, $L = 10 \text{ метрів}$, отримуємо надзвичайну малу ймовірність переходу $P_{a \rightarrow \gamma} \sim 10^{-17} - 10^{-20}$ для $m_A < 10^{-4} \text{ eV}$.

Ймовірність аксіон-фотонних перетворень на галактичних масштабах може бути суттєво більшою і може пояснити проблему "прозорості" Всесвіту для γ -променів високих енергій. Проблема полягає у тому, що фотони високих енергій $E_{\gamma} > 100 \text{ GeV}$, що утворюються в активних ядрах галактик, повинні сильно поглинатися при проходженні до Землі за рахунок взаємодії з фоновими фотонами у галактичному та міжгалактичному просторі (інфрачервоний та оптичний діапазон енергій) за рахунок реакції $\gamma\gamma \rightarrow e e^+$. Однак, по факту,

ми спостерігаємо потік таких високоенергетичних фотонів, амплітуда якого суттєво більша за теоретичні передбачення [212].

В моделі аксіоноподібних частинок високоенергетичні фотони, що утворилися в активних ядрах галактик, частково перетворюються в аксіони в магнітному полі галактики, проходять величезний шлях в космосі не взаємодіючи з фоновими фотонами, і в нашій галактиці перетворюються у фотони високих енергій. При цьому на своєму шляху вони могли проходити через інші галактики з магнітним полем, напрямом та амплітудою якого точно не відомі, що звичайно ускладнює математичні розрахунки та передбачення ефекту.

7.8 Портал Черн-Саймонса

Ідея створення порталу Черн-Саймонса базується на явищі скорочення кіральної аномалії у фізичних теоріях, див. Розділ 4.8. При цьому теорії з аномаліями, що не скорочуються, вважаються нефізичними, оскільки мають проблеми з перенормуванням, див., наприклад, [63]. Інтерес до доданків, що генеруються кіральною аномалією пояснюється тим, що їх вигляд не залежить від маси частинки, що пробігає по внутрішній трикутній петлі. Це означає, що якщо існує дуже важка частинка, яка не може бути народжена в колайдерних експериментах і напяму рееструватися, то вона може проявити себе згенерувавши відповідний кіральний доданок взаємодії. Фактично це єдиний спосіб, як можуть себе проявити у низькоенергетичних експериментах важкі ферміони з масою, що може на багато порядків перевищувати можливості сучасних прискорювачів. Наприклад, якщо припустити, що потужностей сучасних прискорювачів не достатньо для відкриття важкого t -кварка, то він би проявив себе як необхідний додатковий доданок у співвідношенні на скорочення кіральної аномалії в СМ, див. (4.142).

Оскільки взаємодії частинок з калібрувальними полями в СМ добре узгоджуються з експериментальними даними, нас буде цікавити можливість прояву взаємодії нового векторного масивного калібрувального поля X_μ , наприклад, групи $U_X(1)$, з частинками СМ, що генерується умовою скорочення кіральної аномалії.

Припустимо, що існує пара нових важких кіральних ферміонів ψ_L , ψ_R та χ_L , χ_R (тобто такі, в яких ліво- та право-кіральні компоненти мають різні доданки взаємодії), що заряджені як відносно калібрувальної групи СМ $U_Y(1) \times SU_W(2)$, так і відносно певної додаткової групи $U_X(1)$. Припустимо також існування додаткового поля Хіггса Φ , що заряджене лише відносно групи $U_X(1)$. Ферміони СМ та СМ поле Хіггса при цьому вважаються незарядженими відносно групи $U_X(1)$ і, відповідно, напяму не взаємодіють¹ з полем X_μ .

Оскільки важкі ферміони не можуть проявити себе на сучасних прискорювачах, то, здавалося б, і поле X_μ не може себе проявити при

¹Початкова мотивація в роботі [213] полягала в тому, щоб в колайдерних експериментах відносно легкі нові векторні бозони X_μ не змогли б проявити себе як резонанси в реакціях типу $q + \bar{q} \rightarrow X \rightarrow f + \bar{f}$. Насправді, якщо пряма взаємодія буде забороненою, то СМ ферміони все одно будуть взаємодіяти з полем X_μ через петльові діаграми, але така взаємодія буде сильно подавлена.

низьких енергіях. Однак, виявляється, що поле X_μ може себе проявити у взаємодії з калібрувальними полями СМ завдяки трикутним діаграмам, що представлені на Рис.48 [213]. Відповідний бозон X_μ також називають бозоном Черна-Саймонса або ЧС бозоном.

В трикутних петлях, представлених на на Рис.48, пробігають важкі ферміони нової фізики. Для забезпечення скорочення кіральної аномалії в петлях з важкими ферміонами ψ та χ вводиться взаємодія, що не подавлена масштабом мас важких ферміонів та має калібрувально-інваріантний вигляд, який можна представити за допомогою операторів розмірності 6:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{C_Y}{\Lambda_Y^2} \cdot X_\mu (\mathfrak{D}_\nu H)^+ H B_{\lambda\rho} \cdot \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} + h.c. \quad (7.108)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{C_{SU(2)}}{\Lambda_{SU(2)}^2} \cdot X_\mu (\mathfrak{D}_\nu H)^+ F_{\lambda\rho} H \cdot \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} + h.c., \quad (7.109)$$

де $\Lambda_Y, \Lambda_{SU(2)}$ — нові масштабні фактори теорії, $C_Y, C_{SU(2)}$ — нові безрозмірні сталі, H — дублет скалярного поля Хіггса; $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, $F_{\mu\nu} = -ig \sum_{i=1}^3 \frac{\tau^i}{2} V_{\mu\nu}^i$ — тензори $U_Y(1)$ та $SU_W(2)$ відповідних калібрувальних полів. Очевидно, що лагранжіани $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$ є інваріантними відносно локальних калібрувальних перетворень груп $SU_W(2) \times U_Y(1)$. Інваріантність відносно калібрувальної групи $U_X(1)$ забезпечується тим, що поле X_μ — є полем Штюкельберга, див. Розділ 7.6.

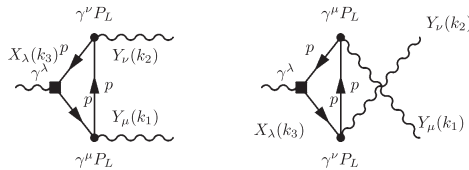


Рис. 48: Діаграми, що генерують взаємодію типу Черна-Саймонса, [213]. В трикутних діаграмах пробігають важкі ферміони, що не входять в Стандартну Модель.

Незважаючи на те, що взаємодія у лагранжіанах (7.108), (7.109) є неперенормовною та являє собою оператори розмірності 6, в низькоенергетичному наближенні (після спонтанного порушення симетрія

поля Хіггса) серед утворених операторів різної розмірності будуть існувати доданки-оператори розмірності 4. Такі доданки можна розглядати окремо і записати як окрему ефективну взаємодію, що схожа на перенормовну¹:

$$\mathcal{L}_{CS} = c_z \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_\mu Z_\nu \partial_\lambda Z_\rho + c_\gamma \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_\mu Z_\nu \partial_\lambda A_\rho + c_w \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_\mu W_\nu^- \partial_\lambda W_\rho^+, \quad (7.110)$$

де A_μ , Z_μ , W_μ — поля фотонів, $W^\pm$ and Z -бозонів відповідно; c_z , c_γ — деякі безрозмірні дійсні коефіцієнти, $c_w = \text{Re } c_w + i \text{Im } c_w$ — безрозмірний комплексний коефіцієнт. Тобто ефективний низькоенергетичний лагранжіан (7.110) характеризується 5-ма невідомими параметрами: c_z , c_γ , $\text{Re } c_w$, $\text{Im } c_w$ та масою бозона X_μ .

Слід відзначити, що лагранжіан (7.110) є інваріантним лише відносно калібрувальної групи СМ $U_{EM}(1)$. Справді, заміна $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ не змінює лагранжіан, оскільки $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \partial_\rho f = 0$ внаслідок антисиметричних властивостей тензора Леві-Чевіта. Цим можна пояснити відсутність взаємодії типу $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho$, яка б порушувала зазначену калібрувальну інваріантність.

Звертаємо увагу, що лагранжіан (7.110) являє собою взаємодію нового векторного бозона X_μ лише з векторними полями СМ, що представлена на Рис.49.

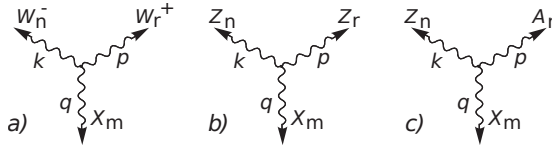


Рис. 49: Взаємодії бозону X_μ з векторними полями СМ.

Існуючі обмеження на параметри теорії внаслідок взаємодії ЧС бозонів з векторними полями СМ

У випадку $M_X < M_W$, M_Z взаємодія у формі (7.110) приводить до появи додаткових каналів розпаду бозонів $W^\pm$ та Z . А саме, дозволеними є такі процеси: $Z_\mu \rightarrow X_\mu + \gamma$, $W_\mu^\pm \rightarrow X_\mu + q_n + \bar{q}_m$, $W_\mu^+ \rightarrow X_\mu + l_n + \bar{\nu}_{ln}$.

¹Питання перенормовності даної взаємодії ще недостатньо досліджено.

Відповідна ширина розпаду Z -бозона легко обчислюється:

$$\Gamma(Z \rightarrow X\gamma) = c_\gamma^2 \frac{M_Z}{96\pi} \left(1 - \frac{M_X^2}{M_Z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{M_Z^2}{M_X^2}\right). \quad (7.111)$$

В наближенні малих M_X , $M_X/M_Z \ll 1$, маємо

$$\Gamma_{ZX} = c_\gamma^2 \frac{M_Z}{96\pi} \left(\frac{M_Z}{M_X}\right)^2. \quad (7.112)$$

Ширину розпаду бозона $W^\pm$ також можна аналітично обчислити в наближенні безмасових кварків і лептонів та без урахування ефектів адронізації:

$$\Gamma(W^+ \rightarrow Xu\bar{d}) = \frac{N_C M_W^3 G_F |V_{ud}|^2}{3456\sqrt{2}\pi^3} [\Theta_{W1}^2 F_1(x) + \Theta_{W2}^2 F_2(x)], \quad (7.113)$$

де $x = M_W/M_X$, $N_C = 3$ — число кольорів кварків, а F_1 , F_2 — безрозмірні функції:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{4}{x^2} - 6 \ln x (24 - 108x^2 + 20x^4 - x^6) - \\ &\quad - 392 + 639x^2 - 274x^4 + 23x^6 + \\ &\quad 3x(14 - x^2)(4 - x^2)^{3/2} \left(\pi - 2 \arctan \frac{x(3 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}(1 - x^2)} \right), \\ F_2(x) &= 4 + 6x^6 \ln x - 45x^2 + 18x^4 + 23x^6 + \\ &\quad \frac{3x^3(20 + 2x^2 - x^4)}{\sqrt{4 - x^2}} \left(\pi - 2 \arctan \frac{x(3 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}(1 - x^2)} \right). \end{aligned}$$

Слід зауважити, що у (7.113) відсутні члени $\sim \Theta_{W1}\Theta_{W2}$. Тобто внески від дійсної та уявної частин константи зв'язку c_w не інтерферують одна з одною.

В наближенні малих значень M_X , $M_X/M_W \ll 1$, отримуємо

$$\Gamma(W^+ \rightarrow Xu\bar{d}) = \Theta_{W1}^2 \frac{N_C M_W^3 G_F |V_{ud}|^2}{864\sqrt{2}\pi^3} \left(\frac{M_W}{M_X}\right)^2. \quad (7.114)$$

Беручи до уваги канали розпаду бозона W у X -бозон і кварки (основний внесок від розпадів у $u, \bar{d}$ та $c, \bar{s}$ через діагональні елементи матриці ККМ), а також у три покоління заряджених лептонів та

відповідні нейтрино, повну ширину розпаду бозона W^+ для випадку $M_X/M_W \ll 1$ можна записати як [214]

$$\Gamma_{WX} = \Gamma(W^+ \rightarrow Xu\bar{d}) (|V_{ud}|^2 + |V_{cs}|^2 + 3/N_C) \approx \Theta_{W1}^2 \frac{M_W^3 G_F}{96\sqrt{2}\pi^3} \frac{M_W^2}{M_X^2}, \quad (7.115)$$

де $N_C = 3$ – кількість кольорових станів кварків.

Поточні вимірювання ширин розпаду бозонів $W^\pm$ і Z узгоджуються з передбаченнями Стандартної Моделі. Проте експериментальні результати мають певні похибки [53]: $\Gamma_W = 2.085 \pm 0.042$ GeB і $\Gamma_Z = 2.4955 \pm 0.0023$ GeB. Тому нові можливі канали розпаду $W^\pm$, Z у бозон ЧС можуть існувати лише за умов $\Gamma_{ZX} < 2\Delta\Gamma_Z$ та $\Gamma_{WX} < 2\Delta\Gamma_W$, де $\Delta\Gamma_Z = 0.0023$ GeB, $\Delta\Gamma_W = 0.042$ GeB. Звідси можна грубо оцінити зверху величину сталих зв'язку [173]:

$$c_\gamma^2 \lesssim 10^{-6} \left(\frac{M_X}{1 \text{ GeB}} \right)^2, \quad [\text{Re } c_w]^2 \lesssim 10^{-2} \left(\frac{M_X}{1 \text{ GeB}} \right)^2. \quad (7.116)$$

Слід зазначити, що для c_γ значно сильніше обмеження впливає з вимірювань на Large Electron–Positron Collider (LEP) однофотонних подій (в нашому випадку для реакції $Z_\mu \rightarrow X_\mu + \gamma$) [215]. Було встановлено верхню межу для такої реакції на рівні $Br = \Gamma_{ZX}/\Gamma_{Z,\text{total}} < 10^{-6}$ для фотонів з енергією понад 15 GeB. Це приводить до суттєво сильнішого обмеження $c_\gamma^2 \lesssim 10^{-9} \left(\frac{M_X}{1 \text{ GeB}} \right)^2$.

У випадку легких ЧС бозонів ($M_X/M_W \ll 1$) очікуються розпади $Z \rightarrow X\gamma$ з енергією фотона $E \lesssim 45$ GeB.

Петльова взаємодія ЧС бозонів з ферміонами СМ

За рахунок петльової взаємодії векторний бозон X_μ може також взаємодіяти з ферміонами СМ та адронами, див. Рис.50.

До основних каналів народження належать розпади важких мезонів з випроміненням бозона Черна-Саймонса, див. Рис.50f), а також народження при нуклон-нуклонних взаємодіях, див. Рис.51.

Назва порталу походить від того, що взаємодія полів X_μ схожа на взаємодію зі струмами типу Черна-Саймонса (6.10), див. також [138], але у спрощеному вигляді. Справа в тому, що у низькоенергетичному наближенні нас цікавитиме лише тричастинкова взаємодія на рівні операторів розмірності 4 (7.110).

Див. додатково [173, 196, 216–219].

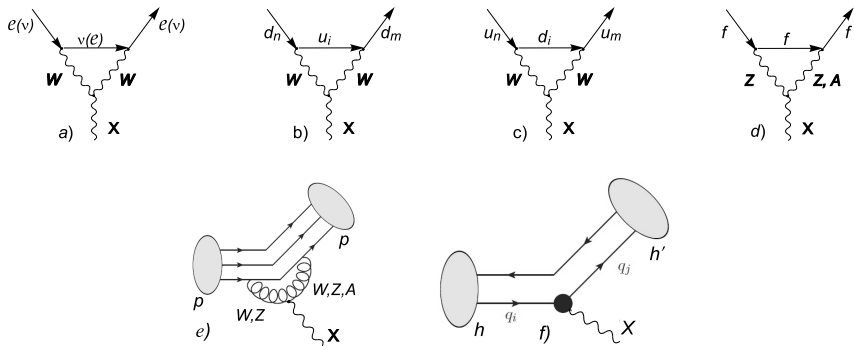


Рис. 50: Петльові взаємодії бозона Черн-Саймонса з лептонами (а) та кварками (b, c, d), а також взаємодії з протонами (е) та мезонами (розпад мезона, f).

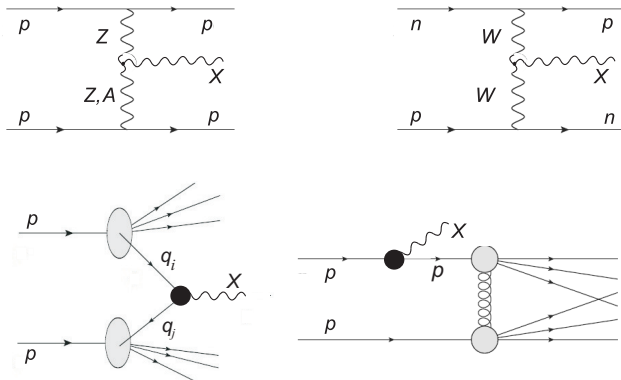


Рис. 51: Діаграми народження бозона Черна-Саймонса при нуклон-нуклонних взаємодіях.

7.9 Теорії великого об'єднання на прикладі теорії групи $SU(5)$

Як зазначалося у Розділі 6.2, поведінка сталих зв'язку при великих енергіях дає підставу вважати, що група симетрії СМ $U_Y(1) \times SU_W(2) \times SU_C(3)$ є справедливою лише на відносно невеликому масштабі енергій, а на більшому масштабі енергій фізика елементарних частинок може описуватися більш високою групою симетрії. В даному розділі ми розглянемо найпростіший випадок розширеної групи симетрії, а саме теорію поля, інваріантну відносно локальних калібрувальних перетворень групи $G = SU(5)$.

Генератори та калібрувальні поля групи $SU(5)$

Група $G = SU(5)$ містить $5^2 - 1 = 24$ генератори $T^a = L^a/2$ ($a = 1, \dots, 24$), що можна представити у вигляді матриць розмірності 5×5 . Зручно обрати ці генератори у формі, що дозволить легко протрактувати відповідні калібрувальні поля, див., наприклад, [146, 220]. Оберемо перші 8 генераторів у формі, щоб верхні на діагоналі блочні матриці 3×3 відповідали генераторам групи $SU(3)$

$$L^{a=1,\dots,8} = \begin{bmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \lambda^a & & & & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.117)$$

де λ^a – матриці Гелл-Манна. Виберемо нижні на діагоналі блочні матриці 2×2 , що вони відповідали генераторам групи $SU(2)$

$$L^{a=9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L^{a=10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.118)$$

При такому виборі явного вигляду генераторів, генераторам L^a ($a = 1, \dots, 8$) можна поставити у відповідність 8 глюонних полів, а генераторам $(L^9 \pm L^{10})/\sqrt{2}$ поля $W^\pm$ бозонів.

Група $SU(5)$ містить $5 - 1 = 4$ діагональні матриці-генератора. Це будуть матриці L^3 та L^8 внаслідок діагональності матриць λ^3 та

λ^8 , див. (D1.40), а також дві діагональні матриці, одна з яких (L^{11}) містить третю матрицю Паулі, а інша матриця (L^{12}) немає аналогів серед матриць $SU(3)$ та $SU(2)$ груп¹

$$L^{a=11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad L^{a=12} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (7.119)$$

Матриця L^{12} , як генератор групи, має нульове значення згортки, тобто суми діагональних елементів, а множник $1/\sqrt{15}$ забезпечує виконання умови нормування $Tr[L^a L^b] = 2\delta^{ab}$.

Генератору L^{11} можна поставити у відповідність калібрувальне поле V_μ^3 СМ, а генератору L^{12} калібрувальне поле B_μ СМ.

Таким чином, ми ввели 12 генераторів групи $SU(5)$ і використали для цього лише елементи блочних матриць 3×3 та 2×2 . Очевидно, що для інших генераторів треба використовувати елементи блочних матриць 3×2 та 2×3

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ \hline 2 \times 3 & 2 \times 2 \end{array} \right]$$

Відповідні генератори L^a обираються максимально просто, а саме як матриці, у яких лише один елемент дорівнює 1, а інші нулеві. Позначимо такі матриці як Δ_{ij} , що означає, що елемент матриці ij дорівнює одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю.

Тоді нехай генераторам $L^{13,14,15} = \sqrt{2}\Delta_{4i}$, $i = 1, 2, 3$ відповідатимуть калібрувальні поля X_μ^i , а генераторам $L^{16,17,18} = \sqrt{2}\Delta_{i4}$, $i = 1, 2, 3$ відповідатимуть калібрувальні поля $\tilde{X}_\mu^i$. Множник $\sqrt{2}$ пов'язаний з умовою нормування $Tr[L^a L^b] = 2\delta^{ab}$.

¹Насправді тут є певна неоднозначність з математичної точки зору. Можна означити генератор L^{12} , що відрізняється на множник (-1) від нашого означення. Це не змінить співвідношення ортогональності та нормування. Але, як буде далі видно, саме означення (7.119) буде правильним з фізичної точки зору.

Аналогічно, нехай генераторам $L^{19,20,21} = \sqrt{2}\Delta_{5i}$, $i = 1, 2, 3$ відповідатимуть калібрувальні поля Y_μ^i , а генераторам $L^{22,23,24} = \sqrt{2}\Delta_{i5}$, $i = 1, 2, 3$ відповідатимуть калібрувальні поля $\tilde{Y}_\mu^i$.

Відповідно, матричне поле $U_\mu = T^a U_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L^a}{\sqrt{2}} U_\mu^a$ ($a = 1, \dots, 24$) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} L^a U_\mu^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 L^a G_\mu^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=9}^{11} L^a V_\mu^{a-8} + \frac{1}{\sqrt{2}} L^{12} B_\mu \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=13}^{15} L^a X_\mu^{a-12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=16}^{18} L^a \tilde{X}_\mu^{a-15} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=19}^{21} L^a Y_\mu^{a-18} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=22}^{24} L^a \tilde{Y}_\mu^{a-21} = \\ &\left[\begin{array}{ccccc} G_\mu^{11} - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & G_\mu^{12} & G_\mu^{13} & \tilde{X}_\mu^1 & \tilde{Y}_\mu^1 \\ G_\mu^{21} & G_\mu^{22} - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & G_\mu^{23} & \tilde{X}_\mu^2 & \tilde{Y}_\mu^2 \\ G_\mu^{31} & G_\mu^{31} & G_\mu^{33} - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & \tilde{X}_\mu^3 & \tilde{Y}_\mu^3 \\ X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & \frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{30}} B_\mu & W_\mu^+ \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & W_\mu^- & -\frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{30}} B_\mu \end{array} \right], \end{aligned} \quad (7.120)$$

а подовжена похідна в теорії поля з $SU(5)$ інваріантністю матиме вигляд

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_5 \sum_{a=0}^{24} T^a U_\mu^a = \partial_\mu - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} \sum_{a=0}^{24} \frac{L^a}{\sqrt{2}} U_\mu^a, \quad (7.121)$$

де g_5 – єдина стала зв'язку теорії з $SU(5)$ інваріантністю.

Така повна похідна повинна діяти на 5-компонентну спінорну стовпчик-функцію $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T$. Оскільки при дії повної похідної верхні три компоненти функції Ψ будуть взаємодіяти лише з полями генераторів групи $SU(3)$, а нижні дві компоненти лише з полями групи $SU(2)$, то верхні три компоненти можна вважати триплетами групи $SU(3)$ та синглетами групи $SU(2)$, а нижні дві компоненти функції Ψ можна вважати синглетами групи $SU(3)$ та дублетами групи

$SU(2)$. Якщо так, то верхні три компоненти можна вважати функцією одного кварка в трьох кольорових станах, і кваркова функція тоді є синглетом групи $SU(2)$. Нижні дві компоненти можна вважати функцією двох лептонів, що утворюють ізотопічний дублет.

Розглянемо частину подовженої похідної, що містить поля B_μ , V_μ^3

$$\partial_\mu - i\frac{g_5}{2}[L^{11}V_\mu^3 + L^{12}B_\mu]. \quad (7.122)$$

В СМ відбувається змішування зазначених полів, утворюючи поля фотонів та Z -бозонів, див. (4.54),

$$B_\mu = \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu, \quad V_\mu^3 = \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu,$$

де θ_W – кут змішування Вайнберга. Використаємо ці ж формули для змішування і в теорії поля з $SU(5)$ симетрією, тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \partial_\mu - i\frac{g_5}{2}[L^{11}V_\mu^3 + L^{12}B_\mu] = \\ \partial_\mu - i\frac{g_5}{2}[(\sin \theta_W L^{11} + \cos \theta_W L^{12})A_\mu + (\cos \theta_W L^{11} - \sin \theta_W L^{12})Z_\mu] \\ = \partial_\mu - ie[QA_\mu + Q_Z Z_\mu], \end{aligned} \quad (7.123)$$

де $eQ = g_5[\sin \theta_W L^{11} + \cos \theta_W L^{12}]/2$ – матриця електричного заряду, $eQ_Z = g_5[\cos \theta_W L^{11} - \sin \theta_W L^{12}]/2$ – матриця зарядів для взаємодії ферміонів з полем Z -бозону, e – електричний заряд протона, який ми вважатимемо пов'язаним зі сталою g_5 так само, як і в СМ $e = g_5 \sin \theta_W$.

Оскільки матриця електричного заряду Q є лінійною комбінацією діагональних генераторів групи $SU(5)$, то вона має бути діагональною та повинна мати нульову згортку (бо всі генератори групи мають нульову згортку)¹ Отже, ми очікуємо такий вигляд зарядової матриці²

$$Q = \begin{bmatrix} Q_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_\nu \end{bmatrix} \quad (7.124)$$

¹В літературі оператор електричного заряду називають генератором групи $SU(5)$.

²Чому заряд електрона в передостанній стрічці, а нейтрино в останній, буде пояснено пізніше.

зі згорткою $Tr[Q] = 3Q + Q_\nu + Q_e = 3Q_q + Q_e = 0$. Отже, в теорії поля з групою симетрії $SU(5)$ ми природним чином отримуємо дробове значення електричного заряду кварка $Q_q = -Q_e/3 = 1/3$ в одиницях заряду протону. Отже, q є **нижнім антикварком** СМ в 5-ферміонній функції!

Знайдемо тепер значення кута Вайнберга з умови $eQ = g_5 \sin \theta_W Q = \frac{g_5}{2} (\sin \theta_W L^{11} + \cos \theta_W L^{12})$, тобто

$$\sin \theta_W \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\sin \theta_W \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\cos \theta_W}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right). \quad (7.125)$$

Запишемо рівняння на заряд нейтрино (остання стрічка матриць)

$$0 = \frac{1}{2} \left(-\sin \theta_W + 3 \frac{\cos \theta_W}{\sqrt{15}} \right), \quad (7.126)$$

звідки автоматично **отримуємо значення кута Вайнберга в теорії $SU(5)$**

$$\tan \theta_W = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sin \theta_W = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \cos \theta_W = \sqrt{\frac{5}{8}}. \quad (7.127)$$

Можна переконатися, що при такому значенні кута Вайнберга рівняння (7.125) виконується для всіх матричних компонент. Отже, маємо

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} = 0.375, \quad (7.128)$$

що не узгоджується зі значенням кута Вайнберга в СМ, див. (4.201),

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \approx 0.223. \quad (7.129)$$

Однак, треба врахувати, що Теорія Великого Об'єднання повинна існувати при дуже високих енергіях. Значення ж $\sin^2 \theta_W$ в СМ виміряно при відносно низьких енергіях і зростає при зростанні масштабу енергій, див. Рис.15.

Враховуючи, що $e = g_5 \sin \theta_W$, отримаємо значення відповідної сталої тонкої структури в теорії з симетрією групи $SU(5)$

$$\alpha_1 = \frac{g_5^2}{4\pi} = \frac{8}{3}\alpha, \quad (7.130)$$

що узгоджується з виразом (6.35), а саме

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{g'^2}{4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{5} \alpha = \frac{8}{3} \alpha. \quad (7.131)$$

Ферміонний сектор теорії з $SU(5)$ симетрією

Отже, 5-ферміонна функція повинна складатися з трьох нижніх антикварків, нейтрино та електрона. Якщо вважати, що лептонні функції (які взаємодіють з полями W , Z бозонів) повинні мати ліву кіральність і утворювати ізотопічний дублет лівих частинок, як і в СМ, то функції нижніх антикварків мають бути зарядовспряженими функціями ізотопічних синглетів нижніх правих кварків $(d_R^r)^C = \bar{d}_L^r$. Отже функції нижніх кварків будуть функціями антикварків з лівою кіральністю, оскільки операція зарядового спряження змінює кіральність частинок. Тоді

$$\Psi_{\bar{5}} = \begin{bmatrix} \bar{d}_L^r \\ \bar{d}_L^g \\ \bar{d}_L^b \\ e_L \\ -\nu_L \end{bmatrix}, \quad (7.132)$$

де риска над функцією означає античастинку, а риска над кольоровим індексом означає антикольор.

У зв'язку з тим, що ізотопічний дублет лівих лептонів в СМ має вигляд (4.3), то природне питання, яке одразу виникає, звучить так. Чому функція електрона знаходиться вище за функцію нейтрино, і чому нейтринна функція входить зі знаком мінус? Відповідь наступна. Записаний 5 стовпчик (7.132) не є стовпчиком СМ, це стовпчик-функція

теорії з $SU(5)$ симетрією. Розташування електронної та нейтринної функції (а також знак мінус) обрані для того, щоб після спонтанного порушення симетрії $SU(5) \rightarrow SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ відновилася структура СМ та лагранжіан СМ.

Запишемо співвідношення Гелл-Манна-Нішиджими (4.19) для частинок антифундаментального мультиплету $\bar{\mathbf{5}}$ (7.132)

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (7.133)$$

де матриця I_3 задана генератором $\frac{1}{2}L^{11}$. Врахуємо, що для частинок антифундаментального представлення треба застосовувати співвідношення Гелл-Манна-Нішиджими як для античастинок, тобто $Q = -(I_3 + \frac{Y}{2}) = -I_3 + \frac{Y_{SU(5)}}{2}$, де

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7.134)$$

Виявляється, що на роль матриці гіперзаряду підходить матриця L^{12} , а саме

$$Y_{SU(5)} = -\sqrt{\frac{5}{3}}L^{12} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7.135)$$

де коефіцієнт $\frac{5}{3}$ це той самий коефіцієнт, на який відрізняється стала α_1 від $g'^2/(4\pi)$ у (7.131). В літературі можна побачити твердження, що це пов'язано з іншим нормуванням оператора гіперзаряду в теорії з симетрією групи $SU(5)$. Матриця гіперзаряду $Y_{SU(5)}$ відповідає гіперзарядам лептонів та синглету нижніх антикварків.

Зазначимо також, що 5 стовпчик (7.132) належить до антифундаментального представлення¹ групи $SU(5)$ [221]:

$$\bar{\mathbf{5}} \rightarrow (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, +2/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1), \quad (7.136)$$

¹Тому й нижній індекс у функції (7.132) $\bar{\mathbf{5}}$.

де цифри в дужках означають (кількість мультиплетних станів по групі $SU(3)$, кількість мультиплетних станів по групі $SU(2)$, кількість мультиплетних станів по групі $U(1)$ (гіперзаряд)). Риска над цифрою означає антифундаментальне представлення. Таким чином, вираз (7.136) означає, що антифундаментальне представлення $\bar{\mathbf{5}}$ містить три антикварки (синглети по $SU(2)$) та два лептони (синглети по $SU(3)$), що ми й спостерігаємо в (7.132).

Звертаємо увагу, що оскільки $\bar{\mathbf{5}}$ стовпчик (7.132) належить до антифундаментального представлення, то він буде перетворюватися під дією перетворень групи $SU(5)$ як

$$\Psi_{\bar{\mathbf{5}}} \rightarrow \Psi'_{\bar{\mathbf{5}}} = \Psi_{\bar{\mathbf{5}}} w^+, \quad w \in SU(5), \quad (7.137)$$

в той час як функція фундаментального представлення перетворювалася б у більш звичному для нас вигляді, а саме як

$$\Psi_{\mathbf{5}} \rightarrow \Psi'_5 = w \Psi_5, \quad w \in SU(5), \quad (7.138)$$

оскільки ці два представлення є спряженими по відношенню один до одного. Зазначимо, що у фундаментальне представлення $\mathbf{5}$ повинні входити частинки

$$\Psi_{\mathbf{5}} = \begin{bmatrix} d_L^r \\ d_L^g \\ d_L^b \\ (e^C)_L \\ (\nu^C)_L \end{bmatrix}, \quad (7.139)$$

але таких частинок в СМ немає, бо в СМ ліві кварки входять в ізотопічний дублет, а не в синглет, і не існує антинейтрино з лівою кіральноністю. Саме тому, в теорії з $SU(5)$ симетрією, використовується антифундаментальне представлення для ферміонів $\bar{\mathbf{5}}$.

Отже, тепер ми можемо записати відповідні кінетичні доданки для ферміонних полів антифундаментального представлення $\bar{\mathbf{5}}$ з подовженою похідною. Враховуючи, що поле $\bar{\mathbf{5}}$ перетворюється як (7.137), то подовжена похідна має визначатися так само, як для поля φ^+ з Розділу 2.2: $\partial_\mu \phi^+ \rightarrow (D_\mu)^+ \varphi^+$, тобто

$$D_\mu^+ = (\partial_\mu + A_\mu)^+ = (\partial_\mu - ig T^a A_\mu^a)^+ = \partial_\mu + ig T^a A_\mu^a.$$

Відповідно

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin1} = i\bar{\Psi}_5\gamma^\mu D_\mu\Psi_5 = i\bar{\Psi}_5\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g_5}{\sqrt{2}} \sum_{a=0}^{24} \frac{L^a}{\sqrt{2}} U_\mu^a \right) \Psi_5 = \\
i \left(\overline{(d_R^r)^C}, \overline{(d_R^g)^C}, \overline{(d_R^b)^C}, \bar{\nu}_L, \bar{e}_L \right) \gamma^\mu \times \\
\begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}} \left[G_\mu^{11} + \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu \right] & G_\mu^{12} & G_\mu^{13} & \hat{X}_\mu^1 & \hat{Y}_\mu^1 \\ G_\mu^{21} & \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}} \left[G_\mu^{22} + \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu \right] & G_\mu^{23} & \hat{X}_\mu^2 & \hat{Y}_\mu^2 \\ G_\mu^{31} & G_\mu^{31} & \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}} \left[G_\mu^{33} + \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu \right] & \hat{X}_\mu^3 & \hat{Y}_\mu^3 \\ X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{30}} B_\mu \right] & W_\mu^+ \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & W_\mu^- & \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}} \left[-\frac{V_\mu^3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{30}} B_\mu \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (d_R^r)^C \\ (d_R^g)^C \\ (d_R^b)^C \\ e_L \\ -\nu_L \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.140}$$

де слід розуміти, що матриця γ^μ стоїть на діагоналі одиничної матриці 5×5 .

Звертаємо увагу, що в даному лагранжіані взаємодії з усіма калібрувальними полями здійснюються через одну й ту саму сталу зв'язку g . Так і має бути згідно з Розділом 6.2, де вказано, що при високих енергіях всі сталі зв'язку СМ можуть прямувати до одного значення.

Наступним кроком потрібно коректно ввести в теорію функції інших ферміонних частинок СМ. Для цього нам знадобляться знання з алгебри групи $SU(5)$. Будемо слідувати роботі [222], але спробуємо не занурюватися в теорію груп. Замість того, щоб працювати у Гільбертовому просторі комплексних чисел $\mathbb{C}$, ми використаємо 5-бітний код для опису частинок СМ. Цей код складається з відповідей на 5 запитань (так -1, ні -0):

- Частинка має верхній (u) ізоспін?
- Частинка має нижній (d) ізоспін?
- Заряд частинки (r) червоний?
- Заряд частинки (g) зелений?
- Заряд частинки (b) синій?

Називатимемо цей код далі як $udrgb$. Використаємо його для однозначної ідентифікації та опису частинок першого покоління. Для спрощення можна записувати лише ненульові значення коду. Наприклад,

01100 (або dr) – частинка з нижнім ізотопічним спіном та червоним кольоровим зарядом, тобто це червоний кварк, що має ліву кіральність. Він нижній в ізотопічному дублеті лівих кварків, отже це – d_L^r кварк.

00100 (r) – d_R^r кварк з червоним зарядом, але правою кіральністю,

01111 ($drgb$) – лівий електрон e_L (важатимемо, що електрон має білий колір, тобто три кольори одночасно),

10111 ($urgb$) – ліве нейтрино ν_L .

Домовимося, що античастинка відрізняється від частинки заміною всіх 1 на 0 та навпаки. Тоді, якщо всі лептони білі, то антилептони будуть чорними (відсутні кольорові заряди, тобто нульові). З цього випливає також, що античервоний заряд антикварка це два кольори – зелений та синій: $\bar{r} = gb$. Функція античастинки визначається через операцію зарядового спряження. Під дією операції зарядового спряження кіральність частинки змінюється на протилежну.

Гіпотетичне праве синглетне нейтрино повинно мати всі нульові значення 5-бітного коду, а його антинейтрино, навпаки, повинно мати всі одиничні значення коду. Але тут є певна невизначеність, пов'язана з тим, що вважати частинкою, а що античастинкою. Виявляється, що зручніше вважати, що праве синглетне нейтрино має всі одиничні значення 5-бітного коду. Наведемо бінарні коди всіх частинок першого покоління в теорії $SU(5)$ в Табл.6.

Бінарні коди для ферміонів теорії $SU(5)$					
1	2	3	4	5	6
$\bar{\nu}_L = 1$	$e_R^+ = u$	$e_L^+ = ud$	$e_R^- = rgb$	$e_L^- = drgb$	$\nu_R = udrgb$
	$\bar{\nu}_R = d$	$u_L^c = uc$	$\bar{u}_R^c = d\bar{c}$	$\nu_L = urgb$	
	$d_R^c = c$	$d_L^c = dc$	$\bar{d}_R^c = u\bar{c}$	$\bar{d}_L^c = ud\bar{c}$	
		$\bar{u}_L^c = \bar{c}$	$u_R^c = udc$		

Табл. 6: Бінарні коди для ферміонів першого покоління теорії $SU(5)$, де $c = r, g, b$ та $\bar{c} = gb, br, rg$, див. [222].

Дана таблиця має 6 стовпчиків. Риска над функцією означає анти-частинку (або знак плюс для електронних функцій). Індекс s має зміст кольорового індексу у кваркових функціях. Таблиця має дзеркальну симетрію до заміни частинок на античастинки, тобто, наприклад, всі частинки другого стовпчика переходять у античастинки п'ятого стовпчика того ж рядка, та навпаки. Відповідно, перші три стовпчики пов'язані з останніми трьома стовпчиками. І в якості базису можна взяти або перші три, або останні три стовпчики. Відзначимо також, що в межах стовпчика знаходяться частинки (античастинки) певної кіральності (лівої або правої), і зміна кіральності відбувається при переході до сусіднього стовпчика (цим і пояснюється вибір для правого синглетного нейтрино всіх одиниць у бінарному коді).

В першому стовпчику міститься лише одна частинка (античастинка до правого синглетного нейтрино), що має бінарний код, який складається лише з нулів. В другому стовпчику містяться лише частинки та античастинки, котрі мають два ненульових значення бінарного коду. Відповідно, у третьому стовпчику містяться лише частинки та античастинки, котрі мають три ненульових значення бінарного коду і так далі.

Можна побачити, що використаний раніше стовпчик з 5 частинок лівої кіральності (7.132), відповідає частинкам (античастинкам) першого покоління п'ятого стовпчика Табл.6.

Це значить, що нові частинки першого покоління ми можемо взяти з третього стовпчика (тоді вони також будуть частинками з лівою кіральністю). Це будуть 10 частинок: один лівий синглет антиелектрона e_L^+ , три лівих верхніх кварки ізотопічного дублету u_L^c , три лівих нижніх кварки ізотопічного дублету d_L^c та три лівих верхніх антикварки ізотопічного синглету $\bar{u}_L^c$.

Оскільки генератори групи $SU(5)$ є матрицями 5×5 нам потрібно з 10 частинок утворити не 10-компонентний стовпчик, а антисиметричну матрицю $\Psi_{10}^{ij} 5 \times 5$, число незалежних компонент якої дорівнює потрібній нам кількості¹ 10.

Ситуація є дещо подібною до того, як тензору моменту кількості руху ставиться у відповідність вектор орбітального моменту. Для антисиметричного тензора можна записати $\Psi_{10}^{ij} \sim (\chi_k \chi_m - \chi_m \chi_k)$, де χ_i

¹Існує також підхід, в якому замість матриці 5×5 нові частинки записуються у 10-компонентний стовпчик. При цьому треба змінити представлення для генераторів групи, щоб вони стали матрицями 10×10 [221].

компоненти ферміонного 5 стовпчика. Така аналогія дозволяє побачити, що, наприклад, компонента матриці 45 має бути пов'язана з лептонними функціями 4 та 5 компонент функції Ψ_5 . Справді, ми бачимо множення двох компонент ізотопічного дублету лептонів, яке дає або симетричний триплетний стан з ізотопічним спіном 1, або синглетний антисиметричний стан з ізотопічним спіном 0, тобто $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$. Симетричній матриці можна поставити у відповідність триплетний стан (симетрична матриця 2×2 має три незалежні компоненти), а потрібній нам антисиметричній матриці відповідає синглетний ізотопічний стан (антисиметрична матриця 2×2 має одну незалежну компоненту). Тому компонента матриці 45 має бути лептонним синглетом. Якщо ми хочемо, щоб це була функція з лівою кіральністю, як і компоненти функції Ψ_5 , то це буде античастинка від правого синглетного стану електрона.

Аналогічно можна відновити зміст інших компонент матриці 5×5 через добуток триплетних кольорових станів. Наприклад, компонента 12 має бути пов'язана з кварковою функцією ізотопічного синглету антикварків. Оскільки ми матимемо добуток двох синглетних кваркових функцій з кольоровими індексами r та g , то два кольорових індекси результуючої функції відповідають одному кольоровому індексу функції антикварку b , що має бути ізотопічним синглетом. З наявних 10 частинок цим характеристикам задовольняє $(u_R^b)^C$ лівий антикварк від ізотопічного синглету верхнього правого кварку СМ.

Аналогічно, можна показати, що компонента 15 має бути пов'язана з кварковою функцією ізотопічного дублету кварків. Справді, ми маємо добуток лептонної функції ізотопічного дублету з нульовим кольоровим зарядом на кваркову функцію ізотопічного синглету з кольоровим індексом. В результаті отримаємо стан з одним кольоровим індексом (кварк), що має й ізотопічний індекс. З наявних 10 частинок цим характеристикам задовольняє u_L^r та d_L^r кварки ізотопічного дублету лівого кварку СМ. Для забезпечення коректного переходу від теорії з симетрією $SU(5)$ до $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ потрібно співставити компоненті 15 матриці функцію d_L^r .

Остаточно, антисиметрична матриця Ψ_{10}^{ij} фундаментального представлення складається з функцій частинок з лівою кіральністю (знаки $\pm$ обираються для коректного подальшого відтворення переходу до теорії $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$) та має вигляд

$$\Psi_{10}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & (u_R^b)^C & -(u_R^g)^C & u_L^r & d_L^r \\ -(u_R^b)^C & 0 & (u_R^r)^C & u_L^g & d_L^g \\ (u_R^g)^C & -(u_R^r)^C & 0 & u_L^b & d_L^b \\ -u_L^r & -u_L^g & -u_L^b & 0 & (e_R)^C \\ -d_L^r & -d_L^g & -d_L^b & -(e_R)^C & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.141)$$

З математичної точки зору фраза про те, що тензор Ψ_{10}^{ij} належить до фундаментального представлення, означає наступний закон при групових перетвореннях

$$\Psi_{10} \rightarrow w \Psi_{10} w^T, \quad \text{або} \quad \Psi_{10}^{ij} = w^i_k w^j_l \Psi_{10}^{kl}, \quad w \in SU(5). \quad (7.142)$$

Отже, тепер ми можемо записати відповідні кінетичні доданки з подовженою похідною для функції¹ Ψ_{10}

$$\mathcal{L}_{kin2} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}_{10,ij} \gamma^\mu D_\mu \Psi_{10}^{ij}, \quad (7.143)$$

де групові індекси i, j змінюються від 1 до 5, а загальний множник $1/2$ пов'язаний з подвійним рахуванням індексів у антисиметричному тензорі Ψ_{10} . Важливо відзначити, що існує домовленість позначати Ψ_{10} з верхніми індексами як величину, що належить до фундаментального представлення групи, а $\bar{\Psi}_{10}$ позначається з нижніми індексами, що підкреслює належність до спряженого представлення групи.

Враховуючи, що поле Ψ_{10} (7.142) перетворюється не так, як функції стовпчики ($\varphi \rightarrow w\varphi$), і не так, як матричні величини ($F_{\mu\nu} \rightarrow w F_{\mu\nu} w^{-1}$) з Розділу 2.2, то подовжена похідна в нашому випадку матиме інший вигляд, що визначається умовою $D_\mu \Psi_{10}^{ij} \rightarrow w (D_\mu \Psi_{10}^{ij}) w^T$. Зазначеній умові задовольнятиме означення повної похідної в (7.121) у вигляді, де похідна подовжується з кожним з індексів:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi^{ij} &= \partial_\mu \psi^{ij} - ig_5 (U_\mu)^i_k \psi^{kj} - ig_5 (U_\mu)^j_k \psi^{ik} = /U_\mu = U_\mu^a T^a / \\ &= \partial_\mu \psi^{ij} - ig_5 U_\mu^a (T^a)^i_k \psi^{kj} - ig_5 U_\mu^a (T^a)^j_k \psi^{ik}. \end{aligned} \quad (7.144)$$

Можна винести за дужки U_μ^a , тоді отримаємо

$$D_\mu \psi^{ij} = \partial_\mu \psi^{ij} - ig_5 U_\mu^a \left[(T^a)^i_k \psi^{kj} + (T^a)^j_k \psi^{ik} \right]. \quad (7.145)$$

¹ Тут діраковське спряження $\bar{\Psi}_{10}$ слід розуміти, як діраковське спряження елементів матриці Ψ_{10} . Сама по собі матриця не транспонується!

Врахувавши антисиметрію по індексах $i \leftrightarrow j$ та означивши генератори в представленні **10** як

$$(T_{\mathbf{10}}^a)^{ij}_{kl} = (T^a)^i_k \delta^j_l + (T^a)^j_l \delta^i_k, \quad (7.146)$$

отримаємо запис подовженої похідної у звичному вигляді

$$D_\mu \psi^{ij} = \partial_\mu \psi^{ij} - ig_5 U_\mu^a (T_{\mathbf{10}}^a)^{ij}_{kl} \psi^{kl}. \quad (7.147)$$

Верхні та нижні індекси в матрицях генераторів слід сприймати формально, для демонстрації згортки за груповими індексами.

Скалярний сектор теорії з $SU(5)$ симетрією

Оскільки ми маємо ферміонну функцію у вигляді 5 стовпчика, подовжену похідну у вигляді матриці 5×5 (яка діятиме і на поле Хіггса), то очікується, що і поле Хіггса матиме вигляд 5 стовпчика з комплексними компонентами у фундаментальному представленні **5** та стрічки у антифундаментальному представленні

$$H_{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \\ H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}, \quad H_{\bar{\mathbf{5}}} = H_{\mathbf{5}}^\dagger = (T^{1*}, T^{2*}, T^{3*}, H^-, H^{0*}), \quad (7.148)$$

де $T^{1,2,3}$ — кольорові (триплетні) компоненти (після спонтанного порушення симетрії набувають дуже великих мас та не проявляють себе при низьких енергіях), H^+ та H^0 — звичайний $SU(2)_L$ -дублет Хіггса СМ. При групових перетвореннях вони змінюються як

$$H_{\mathbf{5}} \rightarrow H'_{\mathbf{5}} = U H_{\mathbf{5}}, \quad H_{\bar{\mathbf{5}}} \rightarrow H'_{\bar{\mathbf{5}}} = H_{\bar{\mathbf{5}}} U^\dagger, \quad U \in SU(5). \quad (7.149)$$

Однак, виявляється, що для коректного опису переходу $SU(5) \rightarrow SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ потрібні додаткові поля Хіггса, котрі можна ввести, ввівши скалярне поле у вигляді матриці Σ , що перетворюється за приєднаним представленням групи $SU(5)$

$$\Sigma = \sum_{A=1}^{24} T^A \Sigma^A, \quad (7.150)$$

де Σ^A – 24 нових дійсних скалярних полів¹.

Таким чином, сектор скалярних полів теорії з $SU(5)$ симетрією можна записати як

$$\mathcal{L}_{scalar} = (D_\mu H_5)^\dagger (D^\mu H_5) + \frac{1}{2} \text{Tr}[(D_\mu \Sigma)(D^\mu \Sigma)] - V(H_5, \Sigma), \quad (7.151)$$

де подовжена похідна діє на скалярне поле в приєднаному представленні Σ згідно з загальним правилом (2.56)

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma + [U_\mu, \Sigma], \quad (7.152)$$

а потенціал взаємодії, в загальному випадку, має громіздкий вигляд та складається з $SU(5)$ -інваріантних комбінацій польових функцій, що є операторами не вище 4 розмірності:

$$\begin{aligned} V(H_5, \Sigma) = & \mu_H^2 H_5^\dagger H_5 + \lambda_H (H_5^\dagger H_5)^2 + \\ & + \frac{m_\Sigma^2}{2} \text{Tr} \Sigma^2 + \frac{a}{3} \text{Tr} \Sigma^3 + \frac{b}{4} (\text{Tr} \Sigma^2)^2 + \frac{c}{2} \text{Tr} \Sigma^4 + \\ & + \alpha H_5^\dagger \Sigma^2 H_5 + \beta H_5^\dagger \Sigma H_5 + \gamma H_5^\dagger H_5 \text{Tr} \Sigma^2. \end{aligned} \quad (7.153)$$

При калібрувальних перетвореннях поле Σ перетворюється стандартним чином (2.54)

$$\Sigma \rightarrow \Sigma' = w \Sigma w^{-1} = w \Sigma w^+, \quad (7.154)$$

бо w є матрицею унітарної групи.

¹Таке матричне скалярне поле в приєднаному представленні групи $SU(2)$ можна було б ввести і в СМ $\Delta = \frac{1}{2} \vec{\tau} \vec{\Delta}$. Відповідне розширення отримало назву моделі скалярного триплету, або моделі Georgi–Machacek [?]. В зазначене розширення СМ входить додатковий скалярний триплет з ізотопічним спіном 1.

Юкавівська взаємодія в $SU(5)$ теорії

В загальному випадку взаємодію між ферміонними полями та полем Хігса можна записати у вигляді¹

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = \frac{1}{4} Y_u^{\alpha\beta} \overline{\Psi}_{10,\alpha}^C{}^{ij} \Psi_{10,\beta}^{kl} H_5^m \epsilon_{ijklm} + Y_d^{\alpha\beta} \overline{\Psi}_{5,\beta}^C{}^i \Psi_{10,\alpha}^{ij} H_5^j + \text{h.c.} \quad (7.155)$$

де C – оператор зарядового спряження, Y_u – матриця Юкавівських констант для верхніх кварків, Y_d – матриця Юкавівських констант для нижніх кварків та лептонів, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – індекси ферміонних поколінь.

Покажемо інваріантність доданків юкавівської взаємодії (7.155) при перетвореннях групи $SU(5)$. Для цього використаємо, що

$$H_5 \rightarrow w H_5, \quad \Psi_{10} \rightarrow w \Psi_{10} w^T, \quad \overline{\Psi}_{10}^C \rightarrow w \overline{\Psi}_{10}^C w^T. \quad (7.156)$$

1) Перший доданок в (7.155) перетвориться як

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcde} (\overline{\Psi}_{10}^C{}^{ab}) (\Psi_{10}^{cd}) H_5^e &\rightarrow \varepsilon_{abcde} (w^{ap} w^{bq} \overline{\Psi}_{10}^C{}^{pq}) (w^{cr} U^{ds} \Psi_{10}^{rs}) (w^{et} H_5^t) \\ &= \varepsilon_{abcde} w^{ap} w^{bq} w^{cr} w^{ds} w^{et} \overline{\Psi}_{10}^C{}^{pq} \Psi_{10}^{rs} H_5^t. \end{aligned} \quad (7.157)$$

Використавши означення детермінанта матриці 5×5

$$\det A = \frac{1}{5!} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} \varepsilon_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} A_{i_3 j_3} A_{i_4 j_4} A_{i_5 j_5} \quad (7.158)$$

та властивості символу Леві-Чивіті можна показати, що

$$\varepsilon_{abcde} w^{ap} w^{bq} w^{cr} w^{ds} w^{et} = (\det w) \varepsilon_{pqrst}.$$

Врахувавши, що детермінант елемента групи $SU(5)$ дорівнює одиниці ($\det w = 1$), можна побачити, що $\varepsilon_{abcde} (\overline{\Psi}_{10}^C{}^{ab}) (\Psi_{10}^{cd}) H_5^e$ є інваріантним при перетвореннях групи $SU(5)$.

2) Другий доданок в (7.155) є інваріантним, оскільки

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_5^C{}^i \Psi_{10}^{ij} H_5^j &\rightarrow \overline{\Psi}_5^C{}^i (w^\dagger)^{ik} \cdot w^{kp} w^{\ell q} \Psi_{10}^{pq} \cdot (w^\dagger)^{m\ell} H_5^m = \\ \overline{\Psi}_5^C{}^i [(w^\dagger)^{ik} w^{kp}] [(w^\dagger)^{m\ell} w^{\ell q}] \Psi_{10}^{pq} H_5^m &= /w^\dagger w = 1 / = \overline{\Psi}_5^C{}^i \Psi_{10}^{ij} H_5^j. \end{aligned} \quad (7.159)$$

¹ Поле Σ не бере участі в генерації мас ферміонних полів, воно забезпечує правильний перехід $SU(5) \rightarrow SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$.

Розпад протона

В теорії з інваріантністю відносно перетворень групи $SU(5)$ достатньо складна взаємодія ферміонів з калібрувальними полями, див. (7.140) та (7.143). Для опису розпаду протона нам потрібно виділити лептон-кваркову взаємодію, що відбувається через векторні поля, яких немає в СМ $X_\mu, \tilde{X}_\mu, Y_\mu, \tilde{Y}_\mu$. Ці поля називають також лептокварковими калібрувальними бозонами (leptoquark gauge bosons). Зробимо це в схематичному вигляді, не вдаючись в деталі. Для початку представимо матрицю калібрувальних полів $U_\mu = T^a U_\mu^a$ (7.120) у блочному вигляді

$$U_\mu = \left[\begin{array}{c|c} G_\mu & \tilde{X}_\mu \\ \hline X_\mu & W_\mu \end{array} \right],$$

де G_μ це глюонні поля сильної взаємодії (матриця розмірності 3×3 , що характеризується кольоровими індексами $a = 1, 2, 3$), W_μ – поля слабкої взаємодії (матриця розмірності 2×2 , що характеризується лептонними індексами $m = 4, 5$), X_μ – лептокваркові поля (матриця розмірності 2×3 , що характеризується кольоровими та лептонними індексами).

Запишемо також в спрощеному вигляді ферміонні поля $\Psi_{\bar{5}}$ (7.132) та антисиметричну матрицю Ψ_{10}^{ij} (7.141)

$$\Psi_{\bar{5}} = \begin{bmatrix} d_R^{C,a} \\ L_m \end{bmatrix}, \quad \Psi_{10}^{ij} = \begin{bmatrix} u_R^{C,ab} & Q^{am} \\ -Q^{ma} & \ell^{mn} \end{bmatrix} \quad (7.160)$$

де $d_R^{C,a}$ – зарядово спряжені нижні праві кварки ($a = 1, 2, 3$ – кольоровий індекс), L_m – дублет лівих лептонів ($m = 4, 5$ – індекс в дублеті), Q – матриця 2×3 з дублету лівих кварків, $u_R^{C,ab}$ – антисиметрична матриця 3×3 з верхніх зарядовспряжених правих кварків, ℓ^{mn} – антисиметрична матриця зарядовспряжених правих лептонів 2×2 з ненульовими елементами $\ell^{45} = -\ell^{54} = e_R^C$.

Знайдемо для початку доданки кварк-лептонної взаємодії, що обумовлені лептокварковими полями. Доданок $i\bar{\Psi}_{\bar{5}}\gamma^\mu D_\mu \Psi_{\bar{5}}$ (7.140) мі-

стить взаємодію типу

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_5 U_\mu \Psi_5 &= (\overline{d_R^C}, \bar{e}_L, \bar{\nu}_L) \begin{bmatrix} G_\mu & \tilde{X}_\mu & \tilde{Y}_\mu \\ \tilde{X}_\mu & & \\ Y_\mu & & W_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_R^C \\ e_L \\ -\nu_L \end{bmatrix} = \\ &= \overline{d_R^C}(\tilde{X}_\mu e_L - \tilde{Y}_\mu \nu_L) + (\bar{e}_L X_\mu - \nu_L Y_\mu) d_R^C + \dots\end{aligned}\quad (7.161)$$

Доданок $\frac{i}{2} \bar{\Psi}_{10,ij} \gamma^\mu D_\mu \Psi_{10}^{ij}$ (7.143) містить взаємодію типу

$$\bar{\Psi}_{10,ij} (U_\mu \Psi_{10} + \Psi_{10} U_\mu^T)^{ij}.\quad (7.162)$$

Запишемо $U_\mu \Psi_{10} + \Psi_{10} U_\mu^T$, залишивши лише лептокваркові поля

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 0 & \tilde{X}_\mu & \tilde{Y}_\mu \\ \tilde{X}_\mu & 0 & 0 \\ Y_\mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u_L & d_L \\ -u_L & 0 & e_R^C \\ -d_L & e_R^C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u_L & d_L \\ -u_L & 0 & e_R^C \\ -d_L & e_R^C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X_\mu & Y_\mu \\ \tilde{X}_\mu & 0 & 0 \\ \tilde{Y}_\mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{Y}_\mu e_R^C & \tilde{X}_\mu e_R^C \\ \tilde{Y}_\mu e_R^C & 0 & X_\mu d_L - Y_\mu u_L \\ -\tilde{X}_\mu e_R^C & -(X_\mu d_L - Y_\mu u_L) & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (7.163)$$

Тоді $\bar{\Psi}_{10,ij} (U_\mu \Psi_{10} + \Psi_{10} U_\mu^T)^{ij}$ дорівнюватиме

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 0 & \bar{u}_L & \bar{d}_L \\ -\bar{u}_L & 0 & \bar{e}_R^C \\ -\bar{d}_L & \bar{e}_R^C & 0 \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{Y}_\mu e_R^C & \tilde{X}_\mu e_R^C \\ \tilde{Y}_\mu e_R^C & 0 & X_\mu d_L - Y_\mu u_L \\ -\tilde{X}_\mu e_R^C & -(X_\mu d_L - Y_\mu u_L) & 0 \end{bmatrix}^{ij} = \\ &= 2[-\bar{u}_L \tilde{Y}_\mu e_R^C + \bar{d}_L \tilde{X}_\mu e_R^C + \bar{e}_R^C X_\mu d_L - \bar{e}_R^C Y_\mu u_L].\end{aligned}\quad (7.164)$$

Тепер запишемо доданки кварк-кваркової взаємодії, що обумовлені лептокварковими полями. Такі доданки містяться у $\bar{\Psi}_{10,ij} (\Psi_{10} U_\mu^T)^{ij}$. Справді, якщо відновити кольоровий сектор ферміонів, отримаємо

$$\Psi_{10} U_\mu^T = \begin{bmatrix} u_R^C & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X_\mu & Y_\mu \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & u_R^C X_\mu & u_R^C Y_\mu \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.\quad (7.165)$$

Відповідно

$$\bar{\Psi}_{10,ij} (\Psi_{10} U_\mu^T)^{ij} = \bar{u}_L X_\mu u_R^C + \bar{d}_L Y_\mu u_R^C + \dots\quad (7.166)$$

Розглянувши тепер доданки взаємодії (7.161), (7.164) та (7.166) як вершини діаграм Фейнмана можна побачити, що в доданках $\bar{d}_L Y_\mu u_R^C$ та $\bar{e}_R^C Y_\mu u_L$ можна об'єднати лінії векторного поля Y утворивши відповідний пропагатор. Тоді, вважаючи, що маса поля Y_μ достатньо велика, отримаємо ефективний оператор вигляду

$$\frac{g_5^2}{M_Y^2} (\bar{d}_L u_R^C) (\bar{e}_R^C u_L), \quad (7.167)$$

що описує розпад протона в домінуючому каналі $p \rightarrow \pi^0 + e^+$, або на рівні елементарних частинок $u(ud) \rightarrow u\bar{u} + e^+$.

Враховуючи, що імпульси кінцевих частинок порядку 1 GeV, вираз для ширини розпаду протона можна легко оцінити з розмірних міркувань¹

$$\Gamma_p = \alpha_{GUT}^2 \frac{m_p^5}{M_Y^4}, \quad (7.168)$$

де $\alpha_{GUT} = g_5^2/(4\pi)$. Наведений наївний вираз досить непогано узгоджується з результатом точних розрахунків і може використовуватися для якісних оцінок.

Як видно з Рис.22 значення сталих зв'язку в СМ приймають близькі значення $\approx 1/40$ при масштабі енергій 10^{14-16} GeV. Але в рамках теорії суперсиметричного великого об'єднання три сталих зв'язку α_i в СМ стають рівними між собою і дорівнюють $\approx 1/20$, див. [148, 149]. В нашому випадку можна приблизно покласти² $\alpha_{GUT} = 1/25$. Сучасні експериментальні обмеження часу життя протона дають значення $\tau > 2.4 \cdot 10^{34}$ років [224]. Підставивши ці значення в (7.168), отримаємо характерний масштаб мас лептокваркових полів

$$M_Y > 6 \cdot 10^{15} \text{ GeV}.$$

Це значення приблизно відповідає енергетичному масштабу, за якого сталі зв'язків в СМ мають близькі значення. Відповідно, в рамках $SU(5)$ теорії очікується $M_{X,Y} \approx 10^{15-16}$ GeV. Якщо ж нижнє значення

¹Звичайно, повний розрахунок дає суттєво складнішу формулу, яка наведена, наприклад, в [223].

²Точне значення α_{GUT} нам і не потрібно для оцінки маси лептокваркового поля.

часу життя протона буде суттєво збільшено, то теорія з $SU(5)$ інваріантністю не зможе це пояснити. Більші значення часу життя протона дає суперсиметричне розширення СМ з $SU(5)$ інваріантністю.

Необхідно відзначити, що необхідний оператор (7.167) також генерується через доданки юкавівської взаємодії (7.155) завдяки взаємодії через кольорові (триплетні) бозони Хіггса (7.148). Розпад протона по цьому каналу має парціальну ширину

$$\Gamma'_p \approx \frac{(Y_u Y_d)^2}{M_T^4} m_p^5, \quad (7.169)$$

де для оцінки можна взяти значення юкавівських сталих зв'язку для кварків першого покоління такі як і в СМ, тобто $Y_u = Y_d \approx 10^{-5}$. Тоді отримаємо, що при значенні $M_T = 10^{15}$ GeV канал розпаду протона через юкавівську взаємодію є дуже подавленим. З іншого боку, з (7.169) випливає, що маса M_T не може бути малою. Оскільки для кварків другого покоління юкавівські стали більші, то більш ймовірний розпад протона в цьому випадку відбуватиметься через канал $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$. Відповідно, обмеження на масу кольорового бозона Хіггса становитиме $M_T > 10^{11-12}$ GeV.

Спонтанне порушення симетрії в $SU(5)$ теорії

Для початку розглянемо спонтанне порушення симетрії для скалярного поля Σ . Як вже зазначалося, це поле не взаємодіє з ферміонними полями. Відповідно, його вакуумне середнє не може генерувати масові доданки ферміонів. Однак поле Σ взаємодіє з векторними полями теорії $SU(5)$ і може генерувати їх масу. Справді, кінетичні доданки в (7.151) містять подовжену похідну з відповідною взаємодією

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma + [U_\mu, \Sigma] = \partial_\mu \Sigma + U_\mu^A [T^A, \Sigma]. \quad (7.170)$$

Відповідно, векторні поля набудуватимуть маси, якщо відповідні їм генератори не комутуватимуть з вакуумним середнім поля Σ . І навпаки, векторні поля залишатимуться безмасовими, якщо відповідні їм генератори комутуватимуть з вакуумним середнім поля Σ .

Згідно зі спектральною теоремою з лінійної алгебри, будь-яку ермітову матрицю можна діагоналізувати унітарним перетворенням $UAU^+ = \text{diag}(a_1, a_2, \dots)$. Оскільки теорія, що розглядається, є інваріантною

відносно калібрувальних перетворень (7.154), а матриця Σ є ермітовою, то, правильним вибором калібрування вакуумне середнє поля Σ можна зробити діагональною матрицею.

Ми хочемо зробити значення вакуумного середнього поля Σ таким, щоб забезпечити перехід $SU(5) \rightarrow SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$. При цьому в теорії $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ поля глюонів та полів групи $SU_W(2)$ безмасові. Відповідно, генератори груп $SU_C(3)$ (знаходяться у верхньому блоці 3×3 на діагоналі матриці 5×5) та $SU_W(2)$ (знаходяться у нижньому блоці 2×2 на діагоналі матриці 5×5) повинні комутувати з вакуумним середнім матриці $\langle \Sigma \rangle$. Очевидно, що це може бути лише за умови $\langle \Sigma \rangle = \text{diag}(a, a, a, b, b)$.

Оскільки $\sigma = T^a \Sigma^a$, а генератори безслідові, то матриця Σ також має бути безслідова, отже

$$\langle \Sigma \rangle = \nu_\Sigma \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \quad (7.171)$$

i є пропорційною до оператора гіперзаряду (7.135). Оскільки маса лептокваркових полів генерується полем Σ , то $M_{X,Y} \sim \nu_\Sigma$ і ми очікуємо $\nu_\Sigma \approx 10^{15-16}$ Гев.

Розглянемо тепер, яким має бути вакуумне середнє поля H_5 з урахуванням того факту, що кінетичні доданки у формі (7.140) генерують маси калібрувальних полів.

Генератори сильної взаємодії являють собою перші 8 генераторів групи $SU(5)$, див. (7.117). З вимоги, щоб масова матриця глюонних полів дорівнювала нулеві, див. (3.81), впливає умова

$$\langle H_5 \rangle^+ T^a T^b \langle H_5 \rangle = 0, \quad a, b = 1, \dots, 8 \quad (7.172)$$

Ця умова задовольняється лише тоді, коли верхні три компоненти поля $\langle H_5 \rangle = 0$. Щоб забезпечити коректний перехід $SU(5) \rightarrow SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$, нижні дві компоненти поля Хігса повинні набути такого ж вакуумного середнього, як і для поля Хігса в СМ, див. Розділ (4.11). Відповідно, для стовпчика $\langle H_5 \rangle$ отримаємо

$$\langle H_5 \rangle = (0, 0, 0, 0, v_H/\sqrt{2})^T. \quad (7.173)$$

Розглянемо значення мас компонент скалярного поля H_5 .

Запишемо потенціал скалярних полів (7.174) у спрощеному вигляді та виділимо доданки $\sim H_5^\dagger H_5$

$$V(H_5, \Sigma) = \mu_H^2 H_5^\dagger H_5 + \alpha H_5^\dagger \Sigma^2 H_5 + \beta H_5^\dagger \Sigma H_5. \quad (7.174)$$

Використавши явний вираз для стовпчика H_5 (7.148) та вираз для вакуумного середнього поля Σ (7.171), отримаємо

$$V(H_5, \Sigma) = \mu_H^2 (T^+ T + H_W^+ H) + \alpha v_\Sigma^2 (9T^+ T + 4H_W^+ H) + \beta v_\Sigma (2T^+ T - 3H_W^+ H), \quad (7.175)$$

де T — являє собою стовпчик з трьох верхніх, а H_{SM} — з двох нижніх компоненти поля H_5 . Відповідно, маси кольорових полів Хіггса T та поля Хіггса в СМ H_{SM} дорівнюють

$$M_T^2 = \mu_H^2 + 9\alpha v_\Sigma^2 + 2\beta v_\Sigma, \quad (7.176)$$

$$M_{H_{SM}}^2 = \mu_H^2 + 4\alpha v_\Sigma^2 - 3\beta v_\Sigma. \quad (7.177)$$

Однак ми знаємо, що $M_T > 10^{11-12}$ ГеВ, а $M_{H_{SM}} \sim 100$ ГеВ. Це дивно, бо з останніх рівнянь випливає, що **для реалізації таких значень скалярних полів має бути сильного fine-tuning (тонка підстройка) параметрів лагранжіана взаємодії** ($\mu_H, v_\Sigma, \alpha, \beta$), що виглядає неприродно.

Генерація мас ферміонних частинок в $SU(5)$ теорії.

Лагранжіан юкавівської взаємодії (7.155) генерує масові доданки ферміонів

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = Y_u^{\alpha\beta} \frac{v_H}{\sqrt{2}} \bar{u}_{R\alpha} u_{L\beta} + Y_d^{\alpha\beta} \frac{v_H}{\sqrt{2}} \bar{d}_{R\alpha} d_{L\beta} + Y_\ell^{\alpha\beta} \frac{v_H}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_{R\alpha} \ell_{L\beta} + \text{h.c.} \quad (7.178)$$

Звідки видно, що в моделі $SU(5)$ виконується співвідношення $Y^d = Y^\ell$, що **приводить до передбачення рівності мас нижніх кварків та заряджених лептонів**, тобто

$$m_d = m_e, \quad m_s = m_\mu, \quad m_b = m_\tau \quad (7.179)$$

на масштабі великого об'єднання — співвідношення, яке не узгоджується з експериментальними даними при низьких енергіях (особливо для перших двох поколінь!), але може бути виправлене за допомогою додаткових полів в подальшій модифікації моделі [225–227].

Переваги та недоліки моделі з $SU(5)$ симетрією

Давайте зробимо короткий підсумок розглянутого розширення СМ з симетрією відносно перетворень за групою $SU(5)$.

До переваг моделі безумовно слід віднести наступні

- відносна простота моделі в порівнянні з іншими моделями Великого об'єднання;
- при великих енергіях модель об'єднує групи симетрії СМ в одне ціле в рамках групи $SU(5)$. Тобто сильні, слабкі та електромагнітні взаємодії мають одну природу. Вони описуються спільною сталою зв'язку g_5 ;
- лептони та кварки мають одну природу та об'єднуються в одну структуру 5-стовпчика або матриці 10×10 . Відповідно між ними виникає взаємодія завдяки новим лептокварковим полям;
- модель пояснює дробові кваркові заряди, які в СМ лише постулюються;
- модель передбачає розпад протона, або процеси з незбереженням баріонного числа, що на якісному рівні може пояснити баріонну асиметрію Всесвіту;
- модель передбачає існування частинок з масами набагато більшими за маси частинок СМ, що виглядає природним. СМ не передбачає нових частинок з масами в проміжку від електро-слабкого масштабу до планківської маси;
- модель природно пояснює розрахунки в межах СМ по зближенню значень сталих зв'язків різних взаємодій при великих енергіях. В моделі $SU(5)$, за означенням, всі три сталі зв'язку повинні стати рівними при великих енергіях.

До недоліків моделі безумовно слід віднести наступні

- модель передбачає рівності мас нижніх кварків та заряджених лептонів на масштабі великого об'єднання — співвідношення, яке не узгоджується з експериментальними даними при низьких енергіях, особливо для частинок перших двох поколінь;

- модель вимагає тонкої підстройки параметрів для одночасного пояснення великої маси кольорового триплету бозонів Хіггса і маси бозона Хіггса в СМ;
- розрахована в рамках моделі баріонна асиметрія є недостатньо великою;
- занадто швидкий розпад протона (час розпаду збільшується в суперсиметричному розширенні теорії $SU(5)$);
- якщо робити перехід від єдиної сталої зв'язку g_5 при масштабі великого об'єднання до низьких енергій, ми отримаємо значення сталих зв'язку сильної, ЕМ та слабкої взаємодії, що не дорівнюють експериментальним даним. Якщо ж взяти правильні значення сталих зв'язку в СМ при низьких енергіях і розглядати їх еволюцію при збільшенні масштабу енергій в підході ренормалізаційної групи, то ці сталі зв'язків не збігатимуться до одного значення. Проблема вирішується в суперсиметричному розширенні теорії $SU(5)$;
- модель не пояснює наявність мас у нейтрино;
- в моделі відсутні частинки темної матерії. В мінімальній $SU(5)$ теорії є нові важкі частинки (лептокваркові поля, кольоровий триплет Хіггса, компоненти поля Σ), але вони нестабільні. Немає механізму (симетрії), що забороняв би їх розпад.

Отже, можна зробити висновок, що мінімальна $SU(5)$ — це досить проста теорія, яка не пояснює всі дані спостережень, але на якісному рівні каже, що теорії Великого об'єднання є перспективними напрямками досліджень і потребують великої уваги. Покращеним варіантом теорії $SU(5)$ є її суперсиметричне розширення: $SUSY SU(5)$. Ще більш покращеними теоріями Великого об'єднання є моделі з більш складними групами симетрії, наприклад, $SO(10)$, E_6 . Зазначені покращені теорії Великого об'єднання містять велику кількість нових частинок за межами СМ, мають кандидатів на частинки темної матерії, містять масивні нейтрино, але також мають проблеми з тонкою настройкою параметрів теорії, яких стає ще більше.

Додаток 1. Елементи теорії груп

У цьому додатку наведено мінімальні відомості з теорії груп, що є необхідними для розуміння основного матеріалу. Більш детально з теорією груп можна ознайомитися, наприклад, за підручниками [60, 70, 228, 229].

Визначення

Групою G називається множина елементів $(a, b, c, \dots)$, для якої визначена операція добутку (групового добутку), що має наступні властивості:

1. замкнутість: якщо елементи a та b належать групі G , то й елемент $c = ab$ також повинен належати групі G ;
2. асоціативність: $a(bc) = (ab)c$;
3. існування одиничного елемента: у групі G повинен існувати такий елемент e , що $ea = ae = a$ для довільного елемента a групи G ;
4. існування оберненого елемента: для довільного елемента a групи G існує такий елемент a^{-1} групи G , що $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Якщо значення добутку елементів групи не залежить від порядку множників $ab = ba$, то групу називають *абелевою*, інакше — *неабелевою*.

Ізоморфні групи. Дві групи вважаються ізоморфними, якщо між їх елементами існує обернено-однозначна відповідність.

Гомоморфні групи. Дві групи є гомоморфними, якщо між їх елементами відповідність не є обернено-однозначною: тобто елементи першої групи однозначно визначаються через елементи другої групи, але елементи другої групи неоднозначно визначаються через елементи першої групи.

Приклади груп

Група $GL(n, R)$ являє собою групу дійсних матриць з ненульовим детермінантом розмірності n . У цьому випадку операція множення відповідає звичайному множенню матриць, а одиничним елементом є

одинична матриця. Умова ненульового детермінанта забезпечує існування обернених елементів. Умова замкнутості виконується автоматично.

Група $\mathbb{Z}_N$ – циклічна група порядку N , представляє собою групу елементів, що утворюються шляхом повторення однієї й тієї самої базової операції, тобто $G = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{N-1}\}$ та $g^N = e$. Група може бути реалізована через комплексні числа виду $g = e^{i2\pi \frac{k}{N}}$, де k, N – цілі числа. Тоді одиничний елемент це $g = e^{i2\pi \frac{0}{N}} = 1$, $g = e^{i2\pi \frac{1}{N}}$, $g^2 = e^{i2\pi \frac{2}{N}}$, $g^N = e^{i2\pi \frac{N}{N}} = e^{i2\pi} = 1$, а обернений елемент визначається як $g^{-k} = e^{i2\pi \frac{-k}{N}}$. Добуток елементів визначається як $g^n \cdot g^k = g^{k+n}$.

Група $U(N)$ являє собою групу унітарних матриць $U^+U=UU^+=I$ розмірності $N \times N$, де I – одинична матриця. Справді, якщо U_1 та U_2 є унітарними матрицями, то і їх добуток U_1U_2 буде унітарною матрицею: $U_1U_2(U_1U_2)^+ = U_1(U_2U_2^+)U_1^+ = U_1U_1^+ = I$. Одиничним елементом є одинична матриця. Оберненим елементом до матриці $U \in U^+$. Для $N > 1$ група $U(N)$ є неабелевою.

Групою $U(1)$ є множина комплексних чисел із модулем, що дорівнює одиниці. Такі числа можна задати у вигляді $z = e^{i\alpha}$, де α дійсне число. Операція множення є звичайним множенням комплексних чисел. Одиничним елементом є одиниця. Дана група є абелевою.

Група $SU(N)$ являє собою групу унітарних матриць розмірності $N \times N$ з одиничним детермінантом $\det U = 1$. Для $N > 1$ вона є неабелевою. Група $SU(N)$ знайшла широке застосування у фізиці елементарних частинок.

Група $SO(N)$ являє собою групу дійсних ортогональних матриць $O^TO = 1$ розмірності $N \times N$ з одиничним детермінантом $\det O = 1$. Для $N > 1$ вона є неабелевою. Група $SO(3)$ є групою обертань у тривимірному просторі.

Представлення групи. Приклади з життя

1. Група танцювальних рухів

Розглянемо умовний танець, що складається з елементарних рухів: повороту на 180° , кроку вперед та кроку назад. Кожен окремий рух можна розглядати як перетворення положення танцівника в просторі. Послідовне виконання двох рухів (виступає як добуток двох елементів групи) породжує новий рух — наприклад, спочатку поворот, а потім крок вперед.

Множина всіх можливих послідовностей таких рухів утворює групу, оскільки виконуються три умови. По-перше, композиція будь-яких двох послідовностей рухів знову є елементом групи (довшою послідовністю рухів). По-друге, існує нейтральний елемент — «не виконувати жодного руху», який залишає положення танцівника незмінним. По-третє, для кожного руху існує обернений рух: наприклад, крок уперед має обернений крок назад, а поворот на 180° є сам собі оберненим.

2. Група перемикачів лампочки

Уявімо електричну лампу, що має лише два стани: увімкнено та вимкнено. Єдина нетривіальна операція — це перемикання вимикача, яке змінює стан лампи на протилежний.

Якщо позначити цю операцію через (I) , то виконання її двічі повертає лампу у початковий стан. Крім того, існує операція «нічого не робити», яка не змінює стану лампи. Отже, маємо множину з двох елементів: «нічого не робити» (I) та перемикачів (I) . Послідовне застосування (груповий добуток) цих операцій задовольняє означенню групи: будь-яка послідовність перемикачів знову є елементом групи, існує одиничний елемент (I) , а кожна операція має обернену (для (I) це знову (I)).

3. Циклічна група днів тижня

Розглянемо послідовність днів тижня: понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя. Введемо операцію «перейти на наступний день». Застосовуючи її один раз, ми переміщуємося від понеділка до вівторка; застосовувши сім разів, повертаємося до понеділка.

У цьому випадку множина всіх можливих зсувів на (n) днів (де $(n = 0, 1, \dots, 6)$) утворює циклічну групу. Нейтральний елемент відповідає зсуву на нуль днів, а обернений до зсуву на (n) днів — це зсув на $(7 - n)$ днів. Хоча цю групу можна формально позначити як $(\mathbb{Z}_7)$, її елементи мають наочний зміст: це реальні часові зсуви у календарі.

4. Приклад ізоморфної групи. Група G_1 являє собою цілі числа $\{0, 1, 2, 3\}$ з додаванням по модулю 4. Тобто сума елементів має бути в межах від 0 до 3, наприклад, $(2 + 3) = 5 = 1 + 4 = 1$. Група G_2 являє собою повороти квадрата на кути $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ по модулю 2π . Група G_1 та G_2 ізоморфні, бо це одна й та сама циклічна група з точністю до перейменування елементів.

5. Приклад гомоморфної групи. Група G_1 поворотів на площині $SO(2)$ по модулю 2π та група G_2 поворотів квадрата на кути $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ по модулю 2π . Маємо взаємно однозначну відповідність

при переході від G_2 до G_1 , але не при переході від G_1 до G_2 , бо група G_1 містить нескінченну кількість елементів (повороти на довільні кути, а не лише на 90°).

Представлення групи (математичне означення) — конкретна реалізація закону множення групових елементів. Якщо представлення групи є матричним, то кожному елементу g групи G ставиться у відповідність матриця $g \rightarrow D(g)$. При цьому, якщо для елементів a, b, c , групи G є справедливим співвідношення $ab = c$, то воно має виконуватись і на матричному рівні $D(a)D(b) = D(c)$, де операція множення в матричному представленні є звичайним множенням матриць.

Звідне представлення. Якщо представлення $D(g)$ може бути зведене до блочно-діагональної форми (за допомогою певної матриці M , що не залежить від групових елементів)

$$MD(g)M^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & D_3(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{для всіх } g \in G, \quad (\text{D1.1})$$

то його називають звідним представленням і записують у вигляді *прямой суми* $D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus D_3(g) \oplus \cdots$ *незвідних представлень* (тобто представлень, які не можна представити у вигляді (D1.1)).

У подальшому представлення $D(g)$ групи G ми будемо записувати просто як g .

Підгрупа H групи G — підмножина групи G , що сама являє собою групу.

Прямим добутком груп $G_1 \times G_2$ називають множину пар $\{g, h\}$ (де $g \in G_1$, $h \in G_2$), у якій операції множення та взяття оберненого елемента мають вигляд

$$\{g, h\}\{g', h'\} = \{gg', hh'\}, \quad \{g, h\}^{-1} = \{g^{-1}, h^{-1}\}, \quad (\text{D1.2})$$

одиничним елементом є пара $\{e_1, e_2\}$, де e_1, e_2 — одиничні елементи груп G_1 та G_2 відповідно. Прямий добуток груп $G_1 \times G_2$ є також групою. При цьому група G_1 є підгрупою групи $G_1 \times G_2$, або, більш точно, вона є ізоморфною підгрупі $G_1 \times G_2$, котра складається з елементів $\{g, e_2\}$. Аналогічно, група G_2 є ізоморфною підгрупі $G_1 \times G_2$, що складається з елементів $\{e_1, h\}$.

Для матричних представлень груп прямий добуток груп може бути реалізований наступним чином. Нехай елементи g є матрицями розміром $n_g \times n_g$, а h – матрицями $n_h \times n_h$. Тоді пара $\{g, h\}$ може бути реалізована у вигляді блочно-діагональної матриці

$$\{g, h\} = \begin{pmatrix} g & O_{n_g \times n_h} \\ O_{n_h \times n_g} & h \end{pmatrix},$$

де $O_{i \times k}$ – нульова матриця розмірності $i \times k$. Як легко переконатися

$$\begin{pmatrix} g & O \\ O & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g' & O \\ O & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gg' & O \\ O & hh' \end{pmatrix}$$

у відповідності з (D1.2).

Група $\mathcal{L}i$ – неперервна група, кожен елемент якої можна задати за допомогою скінченної кількості неперервних дійсних параметрів. Нехай $a(\vec{\theta}) = a(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ елемент групи, що залежить від n дійсних неперервних параметрів. Одиничним елементом вважається елемент $a(0)$. Закон групового множення¹ має вигляд $a(\vec{\theta})a(\vec{\phi}) = a(\vec{\xi})$. Розмірність групи $\mathcal{L}i$ дорівнює кількості неперервних дійсних параметрів, за допомогою яких її можна охарактеризувати. До груп $\mathcal{L}i$ належать, наприклад, групи $U(N)$, $SU(N)$, $SO(N)$.

Генератори групи $\mathcal{L}i$. Нехай $g(\vec{\theta}) = g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ елемент групи G , що є групою $\mathcal{L}i$ та $g(\vec{0}) = 1$. Обмежимося випадком, коли група G може бути представлена за допомогою унітарних матриць. Тоді генераторами X_k групи G будуть

$$X_k = \frac{1}{i} \lim_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \rightarrow 0} \frac{\partial g(\vec{\theta})}{\partial \theta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{D1.3})$$

Число генераторів групи дорівнює розмірності групи. Відповідно, довільний елемент групи G в околі $\vec{0}$ можна задати у вигляді

¹При цьому має існувати зв'язок між параметрами у вигляді певної функції $f(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = \vec{\xi}$, що повинна мати наступні властивості: 1) $f(0, \vec{\theta}) = f(\vec{\theta}, 0) = \vec{\theta}$ (відповідає множенню на одиничний елемент $a(0)a(\vec{\theta}) = a(\vec{\theta})a(0) = a(\vec{\theta})$); 2) $f(\vec{\theta}, f(\vec{\phi}, \vec{\xi})) = f(f(\vec{\theta}, \vec{\phi}), \vec{\xi})$ (відповідає закону асоціативного множення $a(\vec{\theta})[a(\vec{\phi})a(\vec{\xi})] = [a(\vec{\theta})a(\vec{\phi})]a(\vec{\xi})$); 3) $f(\vec{\theta}, \vec{\theta}') = 0$, якщо $a(\vec{\theta}') = a^{-1}(\vec{\theta})$. Функція f має бути аналітичною функцією.

$$g(\vec{\theta}) = I + i \sum_{k=1}^n X_k \theta_k = I + i \vec{X} \vec{\theta}, \quad \vec{\theta} \rightarrow 0. \quad (\text{D1.4})$$

Якщо g є матрицею, то й X_k мають бути лінійно незалежними матрицями. Оскільки група G може бути представлена за допомогою унітарних матриць, то генератори повинні бути ермітовими матрицями ($X_k^+ = X_k$). Справді,

$$g(\vec{\theta})g^+(\vec{\theta}) = (I + i \vec{X} \vec{\theta})(I - i \vec{X}^+ \vec{\theta}) = I + i(\vec{X} - \vec{X}^+) \vec{\theta} + O(\vec{\theta}^2) = I.$$

Можна сказати, що ермітовість генераторів групи Лі забезпечує дійсність параметрів θ_k , що задають елемент групи.

Можна показати, що детермінант унітарного оператора $\hat{U} = e^{i\hat{F}}$, де $\hat{F}$ – ермітова матриця, можна представити у вигляді

$$\det \hat{U} = e^{i \text{Tr} \hat{F}}. \quad (\text{D1.5})$$

Тоді, з умови одиничного детермінанту елемента групи Лі випливає, що генератори групи Лі мають нульовий слід¹ $\text{Tr}[X_k] = 0$.

Генератори групи Лі можна вибрати так, щоб вони утворювали ортонормований базис, а саме:

$$\text{Tr}[X_i X_j] = \frac{\delta_{ij}}{2}. \quad (\text{D1.6})$$

Оскільки генератори X_k лінійно незалежні, то комутатор генераторів повинен виражатися через інші генератори групи Лі

$$[X_j, X_k] = i \sum_{l=1}^n C_{jkl} X_l, \quad (\text{D1.7})$$

де C_{jkl} — *структурні константи групи*, що є дійсними числами та однозначно визначаються структурою даної групи. Справедливе й обернене твердження, що структурні константи цілком характеризують певну групу Лі.

Структурні константи є антисиметричними по перестановці перших двох індексів унаслідок їх визначення через комутатор генераторів

$$C_{jkl} = -C_{kjl}. \quad (\text{D1.8})$$

¹Альтернативним чином, це можна було отримати зі співвідношення для малих $\vec{\theta}$: $\det[g(\vec{\theta})] = \det[I + i \vec{X} \vec{\theta}] \approx 1 + i \sum_{k=1}^n \text{Tr}[X_k] \theta_k = 1$, звідки матимемо $\text{Tr}[X_k] = 0$.

Використавши умову (D1.6), структурні константи можна записати у вигляді

$$C_{jkl} = -2i \text{Tr}[[X_j, X_k]X_l] = -2i(\text{Tr}[X_j X_k X_l] - \text{Tr}[X_k X_j X_l]). \quad (\text{D1.9})$$

Тоді для перестановки двох останніх індексів матимемо

$$C_{jlk} = -2i(\text{Tr}[X_j X_l X_k] - \text{Tr}[X_l X_j X_k]) = / \text{циклічно переставляємо} / = \\ = -2i(\text{Tr}[X_k X_j X_l] - \text{Tr}[X_j X_k X_l]) = -C_{jkl}. \quad (\text{D1.10})$$

Отже, структурні константи становлять тензор, що є антисиметричним при перестановці двох сусідніх індексів (повністю антисиметричний тензор):

$$C_{jkl} = -C_{jlk} = C_{ljk}. \quad (\text{D1.11})$$

Алгебра Лі — дотичний простір для групи Лі в одиничному елементі. Згідно з (D1.4), алгеброю Лі є елементи $i\vec{X}\vec{\theta}$, де $\vec{\theta}$ — дійсні числа. Отже, алгебра Лі складається з матриць, котрі є лінійною комбінацією її генераторів, помножених на уявну одиницю.

Розмірність алгебри Лі дорівнює кількості неперервних дійсних параметрів, за допомогою яких її можна охарактеризувати, або дорівнює кількості генераторів групи Лі.

Пряма сума алгебр Лі. Нехай ми маємо дві алгебри Лі A та B розмірності N_A та N_B відповідно, а T_i^A ($i = 1, \dots, N_A$) та T_j^B ($j = 1, \dots, N_B$) є повними наборами генераторів алгебр Лі A та B . Нехай елементи алгебри A — матриці розмірності $n_A \times n_A$, а елементи алгебри B — матриці $n_B \times n_B$. Тоді наступний набір матриць розмірності $(n_A + n_B) \times (n_A + n_B)$

$$\left(\begin{array}{cc} T_i^A & O_{n_A \times n_B} \\ O_{n_B \times n_A} & O_{n_B \times n_B} \end{array} \right)_{i=1, \dots, N_A} \quad \text{та} \quad \left(\begin{array}{cc} O_{n_B \times n_B} & O_{n_A \times n_B} \\ O_{n_B \times n_A} & T_j^B \end{array} \right)_{j=1, \dots, N_B}$$

загальною кількістю $N_A + N_B$, де $O_{i \times k}$ — нульова матриця розмірності $i \times k$, і є прямою сумою алгебр $A + B$.

Можна показати, що для групи Лі $G = G_1 \times G_2$, що є прямим добутком груп Лі G_1 та G_2 , алгебра Лі групи G ізоморфна прямій сумі алгебр Лі груп G_1 та G_2 .

Підалгебра Лі алгебри Лі A є підпростір в A , замкнений відносно операції комутації, тобто підпростір, що сам є алгеброю Лі.

Можна показати, що для підгрупи Лі H групи Лі A алгебра підгрупи H є підалгеброю групи A .

Інваріантна підалгебра Лі. Підалгебра Лі C в алгебрі A є інваріантною підалгеброю, якщо для всіх $c \in C$, $a \in A$ виконується умова $[c, a] \in C$.

Представлення групи Лі. Нехай G — група Лі, що реалізується за допомогою матриць $D(g)$, де g — елементи групи G . Незвідне представлення, що реалізується за допомогою матриць найменшої розмірності називається *фундаментальним представленням*. Фраза "з найменшою розмірністю" є важливою, оскільки, якщо $D_2(g)$ є представленням групи, то й, наприклад, представлення

$$D_1(g) = \begin{pmatrix} D_2(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{для всіх } g \in G, \quad (\text{D1.12})$$

також є представленням групи.

Якщо ми маємо довільне представлення $D(g)$ групи G , то, виконавши комплексне спряження всіх матриць представлення, отримаємо нове представлення $D^*(g)$, що є *спряженим представленням* до представлення $D(g)$ і в загальному випадку є нееквівалентним до представлення $D(g)$. Справді, для представлення $D(g)$, в околі одиничного елемента, маємо $D(g(\vec{\theta}))|_{\vec{\theta} \rightarrow 0} = I + i \sum_{k=1}^n X_k \theta_k$, де X_k — генератори групи. Для представлення $D^*(g)$, в околі одиничного елемента, маємо $D^*(g(\vec{\theta}))|_{\vec{\theta} \rightarrow 0} = I - i \sum_{k=1}^n X_k^* \theta_k$. Отже, представлення $D(g)$ та $D^*(g)$ будуть однаковими лише за умови

$$X_k = -X_k^*. \quad (\text{D1.13})$$

Для групи $SU(N)$ представлення $D(g)$ та $D^*(g)$ є еквівалентними [228], тобто існує така обернена матриця S , що

$$D^*(g) = S D(g) S^{-1}, \quad g \in G. \quad (\text{D1.14})$$

З розкладу матриці в околі одиничного елемента випливає, що

$$X_k^* = -S X^k S^{-1}. \quad (\text{D1.15})$$

Легко переконатися, що для генераторів $ST^a S^{-1}$ справедливі ті самі співвідношення, що й для генераторів X_k , див. (D1.6) та (D1.7).

Нехай представлення $D(g)$ (позначатимемо як g) групи G та алгебра AG групи G являють собою матриці певної розмірності. Тоді приєднане представлення групи Li задається як

$$Ad(g)A = gAg^{-1}, \quad A \in AG, \quad g \in G. \quad (D1.16)$$

Утворені нові елементи $Ad(g)A$ належать алгебрі Li (елементи групи Li отримуються за допомогою співвідношення (D1.4)). Справді, розглянемо такий елемент групи G : $h(\theta) = gg_A(\theta)g^{-1}$, де $g_A(\theta) = I + A\theta$, $A \in AG$, θ – дійсний параметр, обраний так, що $h(0) = gIg^{-1} = I$. В околі одиничного елемента маємо $h(\vec{\theta}) = g(I + A\theta)g^{-1} = I + gAg^{-1}\theta$. З іншого боку, оскільки $h(\theta)$ – елемент групи G , то в околі одиниці він може бути записаний у вигляді $h(\vec{\theta}) = I + A_h\theta$, де $A_h \in AG$. Порівнюючи дві форми запису, бачимо $gAg^{-1} = A_h \in AG$.

Компактна алгебра Li . Алгебра Li компактна лише тоді, коли в ній можна задати додатньо визначений скалярний добуток, що є інваріантним відносно дії приєданого представлення групи. Група, що відповідає компактній алгебрі Li , є *компактною групою Li* .

Дане визначення можна записати так: компактна, і лише компактна, алгебра Li AG містить таку білінійну форму (A, B) , що для всіх елементів групи Li $g \in G$ та всіх елементів $A, B \in AG$ справедливим є запис

$$(Ad(g)A, Ad(g)B) = (A, B)$$

та для всіх $A \in AG$ $(A, A) \geq 0$. При цьому рівність нулю реалізується лише для нульового елемента алгебри $A = 0$.

Для матричних груп Li такий скалярний добуток можна реалізувати за допомогою згортки. Справді,

$$\begin{aligned} (Ad(g)A, Ad(g)B) &= (gAg^{-1}, gBg^{-1}) = \\ &= Tr(gAg^{-1}gBg^{-1}) = Tr(AB) = (A, B), \end{aligned}$$

однак умова додатньої визначеності не є тривіальною.

Важливим є те, що довільне представлення компактної групи Li еквівалентне *унітарному* представленню, а представлення для генераторів компактної алгебри Li еквівалентні *ермітовим* представленням. Ці властивості є важливими для теорії калібрувальних полів. Зокрема, до компактних груп Li належать групи $U(1)$, $SU(N)$ (для $N > 1$), $SO(N)$ (для $N > 2$).

Проста компактна алгебра $\mathcal{L}i$ — компактна алгебра $\mathcal{L}i$, що не містить інваріантних підалгебр.

Напівпроста компактна алгебра $\mathcal{L}i$ — компактна алгебра $\mathcal{L}i$, що не містить абелевих інваріантних підалгебр.

Важливими є наступні твердження:

1. Усі абелеві компактні алгебри $\mathcal{L}i$ є прямими сумами алгебр $U(1)$.
2. Будь-яку компактну алгебру $\mathcal{L}i$ A можна представити однозначним способом у вигляді прямої суми підалгебр $U(1)$ і простих підалгебр

$$A = U(1) + U(1) + \dots + U(1) + A_1 + \dots + A_n, \quad (D1.17)$$

де A_i — прості алгебри. Іншими словами, кожен компактну групу $\mathcal{L}i$ G можна представити однозначним способом у вигляді прямого добутку

$$G = U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1) \times G_1 \times \dots \times G_n, \quad (D1.18)$$

де G_n — прості групи $\mathcal{L}i$ (їм відповідають прості алгебри $\mathcal{L}i$).

Ранг групи $\mathcal{L}i$ — максимальне число генераторів групи $\mathcal{L}i$, що комутують між собою. Якщо група не має хоча б двох генераторів, котрі комутують між собою, то ми матимемо групу першого рангу, оскільки довільний генератор групи в цьому випадку буде комутувати лише сам із собою.

Оператор Казимира — оператор $\hat{C}_k$, що побудований із комбінації добутків k генераторів групи та комутує з усіма генераторами групи. Число операторів Казимира дорівнює рангу групи. Довільна група $\mathcal{L}i$ завжди матиме хоча б один оператор Казимира $\hat{C}_2$. Оператори Казимира використовують у теоретичній фізиці у зв'язку з тим, що гамільтоніан системи можна виразити через генератори групи $\mathcal{L}i$, і тому оператори Казимира комутуватимуть із гамільтоніаном і визначатимуть інтеграли руху фізичної системи. Незвідні представлення групи $\mathcal{L}i$ можна класифікувати за значеннями операторів Казимира.

Розглянемо детальніше окремі групи $\mathcal{L}i$, що цікаві для нас у фізиці елементарних частинок.

Група $U(N)$

Насамперед, знайдемо кількість незалежних параметрів, за допомогою яких її можна охарактеризувати.

Довільна комплексна матриця розмірності $N \times N$ має $2N^2$ незалежних параметрів. Для унітарної матриці $U(N)$ із рівнянь $U^\dagger U =$

$UU^+ = I$ впливає, що незалежними залишаються лише N^2 параметрів. Візьмемо детермінант із лівої та правої частин умови унітарності $UU^+ = I$ для групи $U(N)$, використавши властивість: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Отримаємо $\det U \det U^+ = |\det U|^2 = 1$, отже, $|\det U| = 1$ та $\det U = e^{i\alpha}$, де α — довільне дійсне число. Отже, групу $U(N)$ можна представити як прямий добуток елементів груп $SU(N)$ та $U(1)$: $U(N) = U(1) \times SU(N)$.

Довільну унітарну матрицю U групи Лі $U(N)$ можна представити у вигляді

$$U = e^{i \sum_{k=1}^N X_k \theta_k}, \quad (\text{D1.19})$$

де X_k — генератори групи $U(N)$, що є ермітовими матрицями; θ_k — дійсні неперервні параметри, що задають елемент групи $U(N)$.

Група $SU(N)$

Унітарна матриця розмірності $N \times N$ характеризується за допомогою N^2 незалежних параметрів. Для матриці з одиничним детермінантом додаткова умова $\det U = 1$ робить незалежними $N^2 - 1$ параметри. Отже, унітарна матриця групи $SU(N)$ характеризується $N^2 - 1$ незалежними параметрами.

Умова одиничного детермінанта накладає додаткову умову на генератори групи $\det U = 1 + i \sum_{k=1}^N \text{Tr}[X_k] \theta_k = 1$, а саме згортка від генераторів групи $SU(N)$ дорівнює нулю

$$\text{Tr}[X_k] = 0. \quad (\text{D1.20})$$

Використавши останнє співвідношення та співвідношення (D1.6) можна отримати простий вираз для коефіцієнтів розкладу довільної матриці $N \times N$ за генераторами групи $SU(N)$

$$A = c_0 I + \sum_{i=1}^N c_i X_i; \quad c_k = 2\text{Tr}[AX_k]; \quad c_0 = \text{Tr}[A]/N. \quad (\text{D1.21})$$

Так само, як і у випадку групи унітарних матриць $U(N)$, унітарну матрицю з одиничним детермінантом U групи Лі $SU(N)$ можна представити у вигляді (D1.19), де X_k — генератори групи $SU(N)$, що є ермітовими матрицями з нульовою згорткою.

Фундаментальне представлення групи $SU(N)$ реалізується за допомогою матриць g розмірності $N \times N$. Якщо V — простір стовпчиків

із N компонент

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix},$$

то фундаментальне представлення групи діє на простір V за правилом

$$\varphi_i \rightarrow \varphi'_i = (g\varphi)_i = g_{ij}\varphi_j, \quad (\text{D1.22})$$

а представлення спряжене до фундаментального діє на простір стовпців V як

$$\varphi_i \rightarrow \varphi'_i = (g^*\varphi)_i = g_{ij}^*\varphi_j, \quad (\text{D1.23})$$

або на простір рядків

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = (\phi g^+)_i = \phi_j g_{ji}^+. \quad (\text{D1.24})$$

Приєднане представлення групи $SU(N)$ діє за правилом (D1.16). Алгебру групи $SU(N)$ становлять матриці розмірності $N \times N$, що є лінійною комбінацією її генераторів $i\vec{X}\vec{\theta}$, де θ_k — дійсні числа.

Група $SU(N)$ містить $N^2 - 1$ генераторів групи, з яких лише $N - 1$ є діагональними. Відповідно, максимальна кількість генераторів, що комутовують між собою, є $N - 1$, що й дорівнює рангу групи. Незвідні представлення групи $SU(N)$ характеризуються значеннями $N - 1$ операторів Казимира.

Корисно навести значення добутку матриць генераторів групи $SU(N)$

$$\sum_{a=1}^n (X^a)_{ij} (X^a)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad f_{aij} f_{ail} = 3\delta_{jl}. \quad (\text{D1.25})$$

Група $SU(2)$

Фундаментальне представлення групи реалізується за допомогою матриць розмірності 2×2 . У якості трьох ($N^2 - 1 = 4 - 1$) генераторів групи виступають ермітові матриці з нульовою згорткою $T_j = \frac{1}{2}\tau_j$, де τ_j — матриці Паулі:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D1.26})$$

Вони мають наступні властивості:

$$\tau_i \tau_j = i \epsilon_{ijk} \tau_k + \delta_{ij} I, \quad [\tau_i, \tau_j]_- = 2i \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad [\tau_i, \tau_j]_+ = 2\delta_{ij} I. \quad (\text{D1.27})$$

Генератори групи $SU(2)$ задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[T_i, T_j] = i \epsilon_{ijk} T_k, \quad (\text{D1.28})$$

де ϵ_{ijk} — повністю антисиметричний тензор третього рангу ($\epsilon_{123} = 1$). Отже, структурними константами групи $SU(2)$ є $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$.

Корисно навести значення згорток за одним, двома або трьома індексами від добутоків структурних констант групи $SU(2)$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6. \quad (\text{D1.29})$$

Довільний елемент групи $SU(2)$ можна задати двома рівнозначними способами

$$U = e^{i\vec{T}\vec{\theta}} = e^{i\vec{T}\vec{\lambda}\theta}, \quad (\text{D1.30})$$

де $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — дійсні параметри; λ — одиничний вектор, що задає вісь в ізотопічному просторі, навколо якої здійснюється поворот на кут θ . Розклад даного виразу в ряд Тейлора з урахуванням (D1.27) дає

$$e^{\pm i\vec{T}\vec{\lambda}\theta} = I \cos \frac{|\vec{\lambda}|}{2} \theta \pm i \frac{\vec{T}\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \sin \frac{|\vec{\lambda}|}{2} \theta. \quad (\text{D1.31})$$

Важливим є те, що для перетворень спряжених елементів групи $SU(2)$ використовується спряжене представлення, тобто

$$\varphi'^* = U^* \varphi^*. \quad (\text{D1.32})$$

У зв'язку з тим, що $\vec{T}^* \neq -\vec{T}$, див. (D1.13), закони перетворень полів φ та φ^* є різними. Щоб зробити перетворення однаковими, використаємо той факт, що існує перетворення (D1.15), яке поєднує між собою матриці Паулі та спряжені матриці Паулі. Справді, врахувавши

$$\tau_1 = \tau_1^*, \quad \tau_2 = -\tau_2^*, \quad \tau_3 = \tau_3^* \quad (\text{D1.33})$$

та співвідношення (D1.27), отримаємо $\tau_i^* = -\tau_2 \tau_i \tau_2$, див. (D1.15). Відповідно

$$U^* = e^{-i\vec{T}^*\vec{\theta}} = e^{i\tau_2 \vec{T} \tau_2 \vec{\theta}} = \tau_2 e^{i\vec{T}\vec{\theta}} \tau_2 = \tau_2 U \tau_2. \quad (\text{D1.34})$$

Тоді вираз (D1.32) можемо записати як

$$(\tau_2 \varphi'^*) = U(\tau_2 \varphi^*). \quad (\text{D1.35})$$

Обидві частини цієї рівності домножимо на уявну одиницю (щоб у функції не помінялися місцями дійсна та уявна частина) і отримаємо

$$\tilde{\varphi}' = U \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = i\tau_2 \varphi^*. \quad (\text{D1.36})$$

Отже, функція $i\tau_2 \varphi^*$ перетворюється за фундаментальним представленням групи $SU(2)$ так само, як і функція φ .

Незвідні представлення групи $SU(2)$ характеризуються значенням лише одного оператора Казимира:

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2. \quad (\text{D1.37})$$

У фізиці елементарних частинок генераторам T_j відповідають оператори $\hat{T}_j$, що відповідають проекціям вектора спіну ($\vec{t}$) (або ізотопічного спіну) на вісі (e_1, e_2, e_3) . Власне значення оператора $\hat{T}^2$ це $t(t+1)$, де t — значення спіну (ізотопічного спіну) системи за модулем, що може набувати цілих або напівцілих невід'ємних значень. При фіксованому значенні спіну t система може мати $2t+1$ значень проекцій спіну на вісь¹ e_3 : $t_3 = -t, -t+1, \dots, t-1, t$. Відповідно розмірність незвідного представлення для системи зі спіном (ізотопічним спіном) t також буде дорівнювати $2t+1$. Це і є мінімальна розмірність матриць, за допомогою яких можна реалізувати представлення.

Фундаментальне представлення групи $SU(2)$ використовується для опису симетрійних властивостей частинок зі значенням ізотопічного спіну $t = 1/2$. Наприклад, протон та нейтрон мають ізотопічний спін $t = 1/2$ та утворюють ізотопічний дублет. При цьому для протона $t_3 = +1/2$, а для нейтрона $t_3 = -1/2$. Тоді в ізотопічному просторі хвильову функцію протона можна представити у вигляді $\Psi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, нейтрона — $\Psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. У цьому випадку, ми автоматично отримуємо

$$\hat{T}_3 \Psi_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \Psi_p \quad (\text{D1.38})$$

¹Значення проекції спіну на третю вісь є виділеним, оскільки відповідний генератор T_3 є діагональним.

$$\hat{T}_3 \Psi_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \Psi_n. \quad (\text{D1.39})$$

Значення оператора Казимира для фундаментального представлення також легко отримати:

$$T^2 = \left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}I.$$

Так і має бути, оскільки $T^2 = t(t+1) = 3/4$.

Зазначимо, що існує однозначна процедура [60, 229] побудови незвідних представлень групи $SU(2)$ для систем із довільним значенням спіну (ізотопічного спіну) t за допомогою матриць розмірності $2t+1$.

Група $SU(3)$

Фундаментальне представлення групи $SU(3)$ реалізується за допомогою матриць розмірності 3×3 . Якості восьми ($N^2 - 1 = 9 - 1$) генераторів групи виступають ермітові матриці з нульовою згорткою $T_j = \frac{1}{2}\lambda_j$, де λ_j ($j = 1, \dots, 8$) — матриці Гелл-Манна:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D1.40})$$

Вони мають властивість $\text{Tr}[\lambda_i \lambda_k] = 2\delta_{ik}$ та задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k, \quad (\text{D1.41})$$

де структурні константи $C_{ijk} = f_{ijk}$ антисиметричні відносно перестановок індексів. Їх ненульові значення (для випадку коли індекси послідовно зростають) дорівнюють:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1; \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2; \\ f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2. \end{aligned} \quad (\text{D1.42})$$

Ненульовими є також величини, що отримуються послідовною перестановкою індексів з урахуванням антисиметричних властивостей.

Оскільки у випадку групи $SU(3)$ існують два діагональні генератори ($n-1 = 2$), відповідні незвідні представлення характеризуються за допомогою двох чисел.

Група $SO(N)$

Фундаментальне представлення групи $SO(N)$ реалізується за допомогою дійсних ортогональних матриць $O^T O = 1$ розмірності $N \times N$ з одиничним детермінантом $\det O = 1$. Довільний елемент групи G в околі $\vec{0}$ може бути заданий у вигляді

$$g(\vec{\theta}) = 1 + \sum_{k=1}^n X_k \theta_k = 1 + \vec{X} \vec{\theta}, \quad \vec{\theta} \rightarrow 0, \quad (\text{D1.43})$$

де X_k – генератори групи $SO(N)$, θ – дійсні параметри.

Умова ортогональності дає

$$g^T g = (1 + \vec{X}^T \vec{\theta})(1 + \vec{X} \vec{\theta}) = 1 + \sum_{k=1}^n \theta_k (X_k^T + X_k) = 1, \quad (\text{D1.44})$$

тобто генератори групи обертань повинні бути антисиметричними матрицями. Умова одиничного детермінанта накладає додаткову умову на генератори групи $\det O = 1 + \sum_{k=1}^n \text{Tr}[X_k] \theta_k = 1$, а саме, згортка від генераторів групи дорівнює нулю.

Отже, довільний елемент групи G в околі $\vec{0}$ може бути заданий у вигляді $g = 1 + A$, де A – антисиметрична матриця. Для фундаментального представлення елемент групи можна представити у вигляді матриць $N \times N$, відповідно, антисиметрична матриця A характеризується $n = N(N-1)/2$ незалежними параметрами. Тобто група $SO(N)$ задається $N(N-1)/2$ параметрами θ_k та має $N(N-1)/2$ генераторів.

Група $SO(3)$

Фундаментальне представлення групи $SO(3)$ реалізується за допомогою дійсних ортогональних матриць $O^T O = 1$ розмірності 3×3 . У якості трьох $3 = 3(3-1)/2$ генераторів групи виступають наступні

антисиметричні матриці з нульовою згорткою

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D1.45})$$

із комутаційними співвідношеннями

$$[T_i, T_j] = -\varepsilon_{ijk} T_k. \quad (\text{D1.46})$$

Відповідно, довільний елемент групи G в околі $\vec{0}$ може бути заданий у вигляді

$$g(\vec{\theta}) = 1 + T_1\theta_1 + T_2\theta_2 + T_3\theta_3, \quad \vec{\theta} \rightarrow 0, \quad (\text{D1.47})$$

де θ_k – дійсні параметри.

Незвідні представлення групи $SO(3)$ характеризуються значенням лише одного оператора Казимира

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2, \quad (\text{D1.48})$$

який для фундаментального представлення дорівнює $T^2 = -2I$.

Зміна координат радіус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ при повороті відносно i -ої координатної вісі на скінченний кут θ_i визначається співвідношенням $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R_i \vec{r}$, де

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{pmatrix}; R_y = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}; R_z = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D1.49})$$

та $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$. Очевидно, що при $\theta_k \rightarrow 0$, $R_k \rightarrow I + T_k \theta_k$ (без підсумовування), де T_k генератори групи $SO(3)$ (D1.45).

Відповідно послідовні повороти, наприклад, спочатку навколо вісі OX , а потім навколо вісі OY будуть описуватися $\vec{a}' = R_y R_x \vec{a}$; а повороти спочатку навколо вісі OY , а потім навколо вісі OX будуть описуватися $\vec{a}' = R_x R_y \vec{a}$. Оскільки генератори групи $SO(3)$ не комутують і група $SO(3)$ є неабелевою, то $R_y R_x \neq R_x R_y$ і має значення у якій послідовності відбуваються повороти.

Додаток 2. Група $SU(2)$. Інфінітоземальний підхід

Розглянемо найпростішу ситуацію, коли в системі існують лише вільні ферміонні поля ψ^p, ψ^n , чії кванти відповідають частинкам, що утворюють ізотопічний дублет, наприклад, нейтрону та протону $(n; p)$. Кожне з цих полів задовольняє вільне рівняння Дірака:

$$\begin{cases} (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi^p = 0 \\ (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi^n = 0 \end{cases} \quad (\text{D2.1})$$

Останній вираз можна компактно записати, якщо ввести восьми-компонентну ферміонну функцію ізотопічного дублету $\Psi = \begin{pmatrix} \psi^p \\ \psi^n \end{pmatrix}$. У цьому випадку рівняння (D2.1) можна записати як

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \quad (\text{D2.2})$$

де останній запис слід розуміти як такий, у якому кожен із доданків є помноженням на одиничну матрицю 2×2 , тобто

$$\left[\begin{pmatrix} i\gamma_\mu \partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma_\mu \partial_\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi^p \\ \psi^n \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{D2.3})$$

Аналогічним чином лагранжіан двох вільних ферміонних полів, що утворюють ізотопічний дублет, можна записати як

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}^p(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^p + \bar{\psi}^n(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^n = \bar{\Psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi = \\ &= (\bar{\psi}_p, \bar{\psi}_n) \begin{bmatrix} i\gamma_\mu \partial_\mu - m & 0 \\ 0 & i\gamma_\mu \partial_\mu - m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi^p \\ \psi^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D2.4})$$

Даний лагранжіан, очевидно, є інваріантним відносно наступних глобальних перетворень

$$\Psi \rightarrow \Psi' = w\Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}w^+, \quad (\text{D2.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\Psi}'[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi' = \bar{\Psi}w^+ \begin{bmatrix} i\gamma_\mu \partial_\mu - m & 0 \\ 0 & i\gamma_\mu \partial_\mu - m \end{bmatrix} w\Psi = \\ &= \bar{\Psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]w^+w\Psi = \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (\text{D2.6})$$

де w — унітарна матриця групи $U(2)$ розмірності 2×2 ($w \neq w(x)$), що зміщує компоненти ψ^p , ψ^n ізотопічного дублету Ψ . Матриця w комутує з γ -матрицями, оскільки вони діють у різних просторах. Справді, у даному випадку γ -матриці формально виступають як звичайні числа, помножені на одиничну матрицю розмірності 2×2 .

Група $U(2)$ може бути представлена у вигляді $U(2) = U(1) \times SU(2)$. Нас буде цікавити інваріантність відносно глобальних перетворень групи $SU(2)$, а саме поворотів у ізотопічному просторі¹. У цьому випадку

$$w = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}}, \quad w^+ = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}},$$

де $\vec{\lambda} = \lambda\vec{v}$; $\vec{v} = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ — одиничний вектор, що визначає напрямок осі, відносно якої робиться поворот в ізотопічному просторі; λ — кут повороту в радіанах; $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ — матриці Паулі, див. Додаток 1. Відповідно, матимемо

$$\begin{cases} \Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}} \Psi \\ \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}} \end{cases} \quad (\text{D2.7})$$

Як ми вже переконалися у (D2.6), лагранжیان (D2.4) має інваріантність відносно глобальних перетворень групи $SU(2)$, тобто коли $\vec{\lambda} \neq \vec{\lambda}(x)$. У випадку, коли кут повороту $\vec{\lambda}$ може бути різним в окремих точках простору, тобто коли $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(x)$, інваріантність лагранжіана (D2.4) відносно перетворень (D2.7) порушується:

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi} w^+ (i\gamma_\mu \partial_\mu - m) w \Psi = \bar{\Psi} w^+ (i\gamma_\mu [w \partial_\mu + \partial_\mu w] - m w) \Psi \neq \mathcal{L}. \quad (\text{D2.8})$$

Для того, щоб зробити лагранжیان ізотопічних полів інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень, введемо взаємодію з новим полем $\vec{B}_\mu = (B_\mu^1, B_\mu^2, B_\mu^3)$ — у подальшому буде показано, що воно є калібрувальним — шляхом подовження похідної, а саме

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2} \vec{\tau} \vec{B}_\mu \right) - m \right) \Psi, \quad (\text{D2.9})$$

¹ Якщо відсторонитися від електромагнітних взаємодій і розглядати лише сильні взаємодії, то протон та нейтрон поведуть себе однаково. Відповідно, вважалось, що це — стани однієї частинки (нуклону), котрі мають різні значення проекції ізотопічного спіну: $\pm 1/2$. Оскільки сильна взаємодія для них реалізується однаково, то система має бути інваріантною відносно поворотів у ізотопічному просторі, що й реалізується за допомогою лагранжіана (D2.4).

де g – константа зв'язку поля $\vec{B}_\mu$ з ізотопічним дублетом Ψ . Як бачимо, поле B_μ^i повинно мати також груповий індекс ізотопічної групи $SU(2)$: $i = 1, 2, 3$.

З'ясуємо, яким чином має перетворюватися поле $\vec{B}_\mu$ для того, щоб лагранжіан (D2.9) залишався інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}}\Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}}, \quad \vec{B}_\mu \rightarrow \vec{B}'_\mu. \quad (\text{D2.10})$$

Розглянемо спрощений випадок нескінченно малих, або інфінітезимальних значень кутів поворотів¹, тобто коли $\vec{\lambda} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\Psi}e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}} \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m \right) e^{+i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}}\Psi = / \lambda \rightarrow 0 / = \\ &= \bar{\Psi} \left(1 - i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2} \right) \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m \right) \left(1 + i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (\text{D2.11})$$

Розпишемо добуток останніх двох дужок у (D2.11):

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m \right) \left(1 + i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2} \right) &= i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m + \\ &+ i\gamma^\mu \left(i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}\partial_\mu + i\frac{\vec{\tau}}{2}\partial_\mu\vec{\lambda} + \frac{g}{4}(\vec{B}'_\mu\vec{\tau})(\vec{\tau}\vec{\lambda}) \right) - i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}m. \end{aligned} \quad (\text{D2.12})$$

Використаємо комутаційні властивості матриць Паулі (D1.28) та отримаємо

$$\begin{aligned} (\vec{B}'_\mu\vec{\tau})(\vec{\tau}\vec{\lambda}) &= B'^i_\mu\lambda^j\tau^i\tau^j = (\vec{\tau}\vec{\lambda})(\vec{B}'_\mu\vec{\tau}) + 2i\epsilon^{ijk}B'^i_\mu\lambda^j\tau^k = \\ &= (\vec{\tau}\vec{\lambda})(\vec{B}'_\mu\vec{\tau}) + 2i\vec{\tau}[\vec{B}'_\mu \times \vec{\lambda}], \end{aligned} \quad (\text{D2.13})$$

де ми використали означення векторного добутку векторів

$$[\vec{A} \times \vec{B}]^k = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon^{ijk} A^i B^j.$$

¹У випадку, коли λ не прямує до нуля, для доведення твердження потрібно буде взяти всі доданки розкладу в ряд Тейлора (D1.31).

Отже, вираз (D2.12) можна записати так:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m + \\ + i\gamma^\mu \left(i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}\partial_\mu + i\frac{\vec{\tau}\partial_\mu\vec{\lambda}}{2} + \frac{g}{4}(\vec{\tau}\vec{\lambda})(\vec{B}'_\mu\vec{\tau}) + i\frac{g}{2}\vec{\tau}[\vec{B}'_\mu \times \vec{\lambda}] \right) - i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2}m. \end{aligned} \quad (\text{D2.14})$$

Знайдемо тепер добуток величин у трьох дужках виразу (D2.11). Нехтуючи доданками другого порядку малості, отримаємо

$$\begin{aligned} \left(1 - i\frac{\vec{\tau}\vec{\lambda}}{2} \right) \times (\text{D2.14}) = \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m \right) + \\ + i\gamma^\mu \left(i\frac{\vec{\tau}\partial_\mu\vec{\lambda}}{2} + i\frac{g}{2}\vec{\tau}[\vec{B}'_\mu \times \vec{\lambda}] \right). \end{aligned} \quad (\text{D2.15})$$

Для того, щоб лагранжіан (D2.11) був інваріантним відносно калібрувальних перетворень групи $SU(2)$, повинна виконуватись рівність

$$e^{-i\frac{\vec{\lambda}\vec{\tau}}{2}} \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}'_\mu) \right) - m \right) e^{+i\frac{\vec{\lambda}\vec{\tau}}{2}} = \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\vec{\tau}\vec{B}_\mu) \right) - m \right).$$

Для випадку нескінченно малих перетворень вираз ліворуч задається (D2.15). Використавши його, отримаємо

$$g\vec{B}'_\mu - \partial_\mu\vec{\lambda} - g[\vec{B}'_\mu \times \vec{\lambda}] = g\vec{B}_\mu. \quad (\text{D2.16})$$

Будемо шукати закон перетворення поля $\vec{B}'_\mu$ у вигляді $\vec{B}'_\mu = \vec{B}_\mu + \vec{C}_\mu$, де $\vec{C}_\mu$ — мала добавка¹ до поля $\vec{B}_\mu$. Нехтуючими доданками з добутком $\vec{C}_\mu$ та $\vec{\lambda}$ як величинами другого порядку малості, отримаємо

$$\vec{C}_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\lambda} + [\vec{B}_\mu \times \vec{\lambda}]. \quad (\text{D2.17})$$

¹Так і повинно бути, оскільки ми працюємо в наближенні, коли параметр калібрувальних перетворень $\vec{\lambda} \rightarrow 0$.

Отже, закон перетворень поля $\vec{B}_\mu$ при нескінченно малих локальних калібрувальних перетвореннях² групи $SU(2)$ (D2.10) має вигляд:

$$\vec{B}'_\mu = \vec{B}_\mu + \vec{C}_\mu = \vec{B}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\lambda} + [\vec{B}_\mu \times \vec{\lambda}]. \quad (\text{D2.18})$$

Таким чином, ми ввели компенсуюче калібрувальне безмасове векторне поле $\vec{B}_\mu$, що робить лагранжіан (D2.4) інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень групи $SU(2)$. Це нове поле, з яким ми досі не мали справи, тому будемо намагатися поводитися з ним так само, як і з калібрувальним полем групи $U(1)$ — електромагнітним полем, яке для нас уже є відомим і звичним.

Отже, як і у випадку електромагнітного поля, у лагранжіані (D2.4) повинні існувати доданки, що описують вільне компенсуюче поле $\vec{B}_\mu$. Звичайно, ми будемо вимагати, щоб лагранжіан вільного поля $\vec{B}_\mu$ був калібрувально інваріантним і був подібним до лагранжіана електромагнітного поля. Запишемо його у вигляді

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}^{\mu\nu}, \quad (\text{D2.19})$$

де $G_{\mu\nu}^i$ — аналог антисиметричного тензора Максвелла для електромагнітного поля ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ — тензорні індекси, $i = 1, 2, 3$ — індекс групи $SU(2)$).

Тензор $\vec{G}_{\mu\nu}$ у формі тензора Максвелла $\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu$ не є інваріантним відносно калібрувальних перетворень (D2.18). Більш того, не є інваріантною, навіть в першому порядку малості, величина $\vec{G}'_{\mu\nu} \vec{G}'^{\mu\nu}$, а отже не є інваріантним і лагранжіан вільного калібрувального поля. Щоб виправити ситуацію, потрібно модифікувати явний вигляд тензора $\vec{G}_{\mu\nu}$, а саме

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu + g[\vec{B}_\mu \times \vec{B}_\nu]. \quad (\text{D2.20})$$

Запропонований тензор $\vec{G}_{\mu\nu}$ не є інваріантним до калібрувальних перетворень¹

$$\vec{G}'_{\mu\nu} = /(\text{D2.18})/ = \vec{G}_{\mu\nu} + [\vec{G}_{\mu\nu} \times \vec{\lambda}], \quad \vec{\lambda} \rightarrow 0, \quad (\text{D2.21})$$

²Вираз, що пов'яже величини $\vec{B}_\mu$ через $\vec{B}'_\mu$ отримується з (D2.18) заміною $\vec{\lambda} \rightarrow -\vec{\lambda}$ та має вигляд $\vec{B}_\mu = \vec{B}'_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\lambda} - [\vec{B}'_\mu \times \vec{\lambda}]$.

¹При доведенні даного виразу потрібно використати наступне співвідношення:
 $\sum_k \epsilon^{ijk} \epsilon^{mnk} = \delta^{im} \delta^{jn} - \delta^{in} \delta^{jm}, \delta_{ij}$ — символ Кронекера.

але забезпечує інваріантність величини $\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu}$ в межах точності проведення наших розрахунків

$$\vec{G}'_{\mu\nu}\vec{G}'^{\mu\nu} = \vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + [\vec{G}_{\mu\nu} \times \vec{\lambda}][\vec{G}^{\mu\nu} \times \vec{\lambda}] = \vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + O(\vec{\lambda}^2). \quad (\text{D2.22})$$

Остаточно лагранжіан, що є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень групи $SU(2)$, має вигляд

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{B}_\mu \right) - m \right) \Psi - \frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu}. \quad (\text{D2.23})$$

Додаток 3. Перетворення полів під дією групи Пуанкаре

Перетвореннями Лоренца (групою Лоренца) називають перетворення з однієї системи відліку в іншу шляхом поворотів у 4-вимірному просторі-часі. Якщо до 4-поворотів додати перетворення трансляції у 4-просторі, утворюється група перетворень Пуанкаре.

Нагадаємо закони перетворення різних типів полів при переході з однієї системи відліку (поле U в точці $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$) в іншу (поле U' в точці $x' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$) завдяки поворотам у 4-вимірному просторі та трансляціям.

Скалярне поле не змінюється:

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (\text{D3.1})$$

Векторне поле перетворюється як:

$$\begin{cases} A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(x), \\ A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}(x). \end{cases} \quad (\text{D3.2})$$

Тензорні поля перетворюються як добуток векторних полів:

$$T'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}(x), \quad T_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}(x). \quad (\text{D3.3})$$

Спінорене поле:

- а) при перетвореннях трансляції не змінюється: $\Psi'(x') = \Psi(x)$;
- б) при просторових поворотах у площині ik ($i, k = 1, 2, 3$), коли повертаємо систему відліку від орта $\vec{e}^i$ до орта $\vec{e}^k$ на кут $|\vec{\varphi}|$ (напрямок вектора $\vec{\varphi}$ співпадає з напрямком вектора $\vec{e}^i \times \vec{e}^k$):

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda(\vec{\varphi})\Psi(x), & \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda^{-1}(\vec{\varphi}) \\ \Lambda(\varphi) = e^{i\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}}, & \Lambda^{-1}(\varphi) = e^{-i\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}} \end{cases}, \quad (\text{D3.4})$$

або у матричному вигляді:

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda(\vec{\varphi})\Psi(x) = \left[\cos \frac{|\vec{\varphi}|}{2} + i \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right] \Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda^{-1}(\vec{\varphi}) = \bar{\Psi}(x)e^{-i\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}} = \bar{\Psi}(x) \left[\cos \frac{|\vec{\varphi}|}{2} - i \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right] \end{cases}; \quad (\text{D3.5})$$

в) при поворотах у площині $0, i$ на кут $|\vec{\varphi}|$ (лоренцеві бусти), коли відбувається перехід у систему відліку, що рухається відносно початкової системи відліку зі швидкістю $V = \tanh \varphi$ уздовж осі i (напрямок $\vec{\varphi}$ співпадає з напрямком просторового орту e^i)

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda_0(\vec{\varphi})\Psi(x), & \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda_0^{-1}(\vec{\varphi}) \\ \Lambda_0(\varphi) = e^{-\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}}, & \Lambda_0^{-1}(\varphi) = e^{\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} \end{cases}, \quad (\text{D3.6})$$

або у матричному вигляді:

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda(\vec{\varphi})\Psi(x) = \left[\cosh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} - \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right] \Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda^{-1}(\vec{\varphi}) = \bar{\Psi}(x) \left[\cosh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} + \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right]. \end{cases} \quad (\text{D3.7})$$

Явний вигляд матриць $\vec{\Sigma}$ та $\vec{\alpha}$ наведено в переліку позначень на стор. 14. Перетворення координат $x \rightarrow x'$ при різних перетвореннях Лоренца наведено у [58].

Окрім 4-поворотів та трансляцій, до перетворень системи відліку належать також просторова інверсія $\hat{P}(x^0, \vec{x}) \rightarrow (x^0, -\vec{x})$ та часова інверсія $\hat{T}(x^0, \vec{x}) \rightarrow (-x^0, \vec{x})$.

По відношенню до перетворень просторової інверсії на скалярні та векторні поля вводять додаткові означення:

$$\hat{P}\varphi(x^0, \vec{x}) = \pm \varphi(x^0, -\vec{x}) \quad (\text{D3.8})$$

(де знак $(+)$ відноситься до випадку скалярних полів, а знак $(-)$ – до випадку псевдоскалярних полів);

$$\hat{P}U^\mu(x^0, \vec{x}) = \pm U_\mu(x^0, -\vec{x}), \quad (\text{D3.9})$$

(де знак $(+)$ відноситься до випадку векторних полів, а знак $(-)$ – до випадку псевдовекторних полів). При цьому звичайні та псевдополя поводять себе однаково при перетвореннях групи Пуанкаре.

Для аналізу лагранжіанів КТП корисно пам'ятати, що при згортці індексів тензор переходить у тензор меншого рангу (у тому числі вектор чи скаляр), а добуток елементів векторів утворює тензор: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ – скаляр, $F^{\mu\nu}A_\nu = B^\mu$ – вектор, $A^\mu B^\nu = T^{\mu\nu}$ – тензор. По відношенню до ферміонного поля: $\bar{\psi}\psi$ – скаляр, $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ – псевдоскаляр, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ – вектор, $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ – псевдовектор.

Додаток 4. Кіральні стани ферміонів

У довільному представленні γ -матриць незалежні компоненти ферміонної функції можна виділити за допомогою проєкційних операторів¹

$$\hat{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad \hat{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (\text{D4.1})$$

для яких виконуються співвідношення

$$\hat{P}_L + \hat{P}_R = \hat{I}; \quad \hat{P}_L \hat{P}_L = \hat{P}_L; \quad \hat{P}_R \hat{P}_R = \hat{P}_R; \quad \hat{P}_L \hat{P}_R = \hat{P}_R \hat{P}_L = 0. \quad (\text{D4.2})$$

Тоді незалежними компонентами хвильової функції будуть $\Psi_L = \hat{P}_L \Psi$, та $\Psi_R = \hat{P}_R \Psi$.

Функції $\Psi_L(x)$ та $\Psi_R(x)$ є власними функціями оператора кіральності γ^5 . Якщо $\gamma^5 \Psi = -\Psi$, то це функція $\Psi_L(x)$ із лівою кіральністю ($\hat{P}_+ \Psi_L = 0$). Якщо $\gamma^5 \Psi = +\Psi$, то це функція $\Psi_R(x)$ із правою кіральністю ($\hat{P}_- \Psi_R = 0$).

У кіральному представленні проєкційні оператори та функції Ψ_L та Ψ_R мають наступний вигляд:

$$\hat{P}_- = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}; \quad (\text{D4.3})$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_- \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{D4.4})$$

У представленні Дірака, відповідно, маємо:

$$\hat{P}_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}; \quad (\text{D4.5})$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_- \Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_2 \\ -(\Psi_1 - \Psi_2) \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ \Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_1 + \Psi_2 \\ \Psi_1 + \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D4.6})$$

Як легко побачити, функції Ψ_L та Ψ_R у кожному із представлень справді є незалежними. Окрім цього, дані компоненти функції при перетвореннях неоднорідної групи Лоренца (трансляції, просторові повороти та лоренцеві бусты) будуть перетворюватися незалежно одна від одної.

¹Відзначимо, що можна зустріти альтернативне позначення для проєкційних операторів $\hat{P}_- = \hat{P}_L$, $\hat{P}_+ = \hat{P}_R$, що явно вказує на знак перед матрицею γ^5 .

Відзначимо, що оператор кіральності для масивних частинок не є інтегралом руху ($[\hat{H}, \gamma^5]_- \neq 0$), але його значення є лоренц-інваріантною величиною.

Запишемо ряд корисних співвідношень для кіральних функцій:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R, \quad \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_L + \bar{\Psi}_R; \quad (\text{D4.7})$$

$$\Psi_L = \hat{P}_- \Psi, \quad \Psi_R = \hat{P}_+ \Psi; \quad (\text{D4.8})$$

$$\bar{\Psi}_L = (\Psi_L)^+ \gamma^0 = \Psi^+ \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^0 = \Psi^+ \gamma^0 \frac{1+\gamma^5}{2} = \bar{\Psi} \hat{P}_+, \quad \bar{\Psi}_R = \bar{\Psi} \hat{P}_-; \quad (\text{D4.9})$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_L = \bar{\Psi}_R \Psi_R = 0 \Rightarrow \bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R; \quad (\text{D4.10})$$

$$\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_R = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_L = 0 \Rightarrow \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L; \quad (\text{D4.11})$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R = \bar{\Psi} \hat{P}_+ \hat{P}_+ \Psi = \bar{\Psi} \hat{P}_+ \Psi, \quad \bar{\Psi}_R \Psi_L = \bar{\Psi} \hat{P}_- \Psi; \quad (\text{D4.12})$$

$$\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L = \bar{\Psi} \hat{P}_+ \gamma^\mu \hat{P}_- \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{P}_- \hat{P}_- \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{P}_- \Psi; \quad (\text{D4.13})$$

$$\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R = \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{P}_+ \Psi. \quad (\text{D4.14})$$

Також відзначимо, що квантовий стан ферміонів, окрім значення енергії та імпульсу, також характеризується квантовим числом спіральності, що дорівнює знаку проекції спіну на напрямок руху¹ ± 1 .

Можна переконатися, що для випадку масивних ферміонів квантове число спіральності є інтегралом руху, $[\hat{H}, \vec{\Sigma} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}]_- = 0$, однак не є лоренц-інваріантним. Справді, перейшовши в систему відліку, що рухається уздовж напрямку руху частинки, але з більшою швидкістю, ми отримаємо, що проекція спіну на напрямок руху змінить знак. Із наведених міркувань відразу випливає, що для безмасових частинок, які рухаються зі швидкістю світла, ситуація змінюється, і значення квантового числа спіральності буде лоренц-інваріантним інтегралом руху.

У випадку безмасових частинок (наприклад, нейтрино, у СМ), квантові числа кіральності та спіральності співпадають і є як лоренц-інваріантною величиною, так і інтегралом руху.

¹У випадку, коли імпульс частинки дорівнює нулю, все сказане залишається справедливим, але квантове число μ дорівнює знаку проекції спіну не на напрямок руху, а на довільний, фіксований у просторі напрямок.

ЛІТЕРАТУРА

1. P.A.M. Dirac, *Quantum theory of emission and absorption of radiation*, *Proc. Roy. Soc. A* **114** (1927) 243.
2. J. Chadwick, *Intensitätsverteilung im magnetischen spectrum der β -strahlen von radium B + C*, *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.* **16** (1914) 383.
3. W. Pauli, *Open letter to radioactive persons*, *English translation in L.M. Brown, Physics Today* 31, 27 (1978), 1930.
4. J. Chadwick, *Possible existence of a neutron*, *Nature* **129** (1932) 312.
5. E. Fermi, *Versuch einer theorie der β -strahlen. I*, *Z. Phys.* **88** (1934) 161.
6. H. Bethe and R. Peierls, *The neutrino*, *Nature* **133** (1934) 532.
7. G. Gamow and E. Teller, *Selection rules for the beta-disintegration*, *Phys. Rev.* **49** (1936) 895.
8. H.R. Crane and J. Halpern, *New experimental evidence for the existence of a neutrino*, *Phys. Rev.* **53** (1938) 789.
9. C.L.J. Cowan, F. Reines, F.B. Harrison, H.W. Kruse and A.D. McGuire, *Detection of the free neutrino: a confirmation*, *Science* **124** (1956) 103.
10. G. Danby, J.-M. Gaillard, K. Goulianos, L.M. Lederman, N.B. Mistry, M. Schwartz et al., *Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **9** (1962) 36.
11. C.S. Wu, E. Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hoppes and R.P. Hudson, *Experimental test of parity conservation in beta decay*, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1413.
12. H. Frauenfelder et al., *Parity and the polarization of electrons from Co^{60}* , *Phys. Rev.* **106** (1957) 386.

13. T.D. Lee and C.N. Yang, *Parity nonconservation and a two-component theory of the neutrino*, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1671.
14. L.D. Landau, *On one possibility for polarization properties of the neutrino*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32** (1957) 407.
15. A. Salam, *On parity conservation and neutrino mass*, *Nuovo Cim.* **5** (1957) 299.
16. M. Goldhaber, L. Grodzins and A.W. Sunyar, *Helicity of neutrinos*, *Phys. Rev.* **109** (1958) 1015.
17. C.S. Wu and S.A. Moszkowski, *Beta Decay*, Interscience Publishers, New York (1966).
18. R.P. Feynman and M. Gell-Mann, *Theory of the Fermi interaction*, *Phys. Rev.* **109** (1958) 193.
19. R.E. Marshak and E.C.G. Sudarshan, *Chirality invariance and the universal Fermi interaction*, *Phys. Rev.* **109** (1958) 1860.
20. J.J. Sakurai, *Mass reversal and weak interactions*, *Nuovo Cim.* **7** (1958) 649.
21. J. Byrne, *An overview of neutron decay*, Proc. of the workshop "Quark-Mixing, CKM-Unitarity ", Heidelberg, Germany (2002), [hep-ph/0312124](#).
22. J. Schwinger, *A theory of the fundamental interactions*, *Ann. Phys.* **2** (1957) 407.
23. T.D. Lee and C.N. Yang, *Possible nonlocal effects in μ decay*, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1611.
24. L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland (1982).
25. M. Gell-Mann, *The Eightfold Way*, Westview Press (2000).
26. M. Gell-Mann, *The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry*, Tech. Rep. CTSL-20, California Institute of Technology Synchrotron Laboratory (1961).

27. Y. Ne'eman, *Derivation of strong interactions from a gauge invariance*, *Nucl. Phys.* **26** (1961) 222.
28. G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking*, Tech. Rep. TH-401, CERN, Geneva (1964).
29. G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. II*, Tech. Rep. TH-412, CERN, Geneva (1964).
30. G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking II*, in *Developments in the Quark Theory of Hadrons*, D. Lichtenberg and S. Rosen, eds., vol. 1, (Nonantum, Mass.), pp. 22–101, Hadronic Press (1980).
31. M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214.
32. S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, *Weak interactions with lepton–hadron symmetry*, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1285.
33. M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP violation in the renormalizable theory of weak interaction*, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.
34. H. Harari, *A new quark model for hadrons*, *Phys. Lett. B* **57** (1975) 265.
35. C.N. Yang and R.L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
36. P.W. Higgs, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508.
37. P.W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156.
38. F. Englert and R. Brout, *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.
39. G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W.B. Kibble, *Global conservation laws and massless particles*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585.
40. V.L. Ginzburg and L.D. Landau, *On the theory of superconductivity*, *Sov. Phys. JETP* **20** (1950) 1064.

41. J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, *Microscopic theory of superconductivity*, *Phys. Rev.* **106** (1957) 162.
42. N.N. Bogoliubov, *A new method in the theory of superconductivity*, *Sov. Phys. JETP* **7** (1958) 41.
43. M. Tinkham, *Introduction to the Theory of Superconductivity*, McGraw-Hill (1996).
44. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I*, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
45. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.
46. S.L. Glashow, *Partial symmetries of weak interactions*, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
47. S. Weinberg, *A model of leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.
48. A. Salam in *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, N. Svartholm, ed., (Stockholm), p. 367, Almquist and Wiksells, 1968.
49. F.J. Hasert et al., *Search for elastic muon-neutrino electron scattering*, *Phys. Lett. B* **46** (1973) 121.
50. F.J. Hasert et al., *Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the gargamelle neutrino experiment*, *Phys. Lett. B* **46** (1973) 138.
51. M.L. Perl et al., *Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation*, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 1489.
52. K. Kodama et al., *Observation of tau neutrino interactions*, *Phys. Lett. B* **504** (2001) 218 [[hep-ex/0012035](#)].
53. Particle Data Group. <http://pdg.lbl.gov>.
54. Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562 [[hep-ex/9807003](#)].

55. E. Matsinos, *A brief history of the pion-nucleon coupling constant (2019)*, [nucl-th/1901.01204](#).
56. N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley-Interscience (1980).
57. I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall (1963).
58. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*, Butterworth-Heinemann (Elsevier), 4 ed. (2000).
59. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, vol. 4 of *Course of Theoretical Physics*, Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2 ed. (1982).
60. T.P. Cheng and L.F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press (2006).
61. G. Landi and A. Zampini, *Linear Algebra and Analytic Geometry for Physical Sciences*, Springer (2018).
62. J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Broken symmetries*, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
63. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2 ed. (1996).
64. P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Snowball Publishing (2012).
65. H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, *The Stückelberg field*, *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 3265 [[hep-th/0304245](#)].
66. G.D. Kribs, G. Lee and A. Martin, *Effective field theory of Stückelberg vector bosons*, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 055020 [[2204.01755](#)].
67. В.М. Горкавенко, *Діаграмна техніка Фейнмана. Ймовірність розпаду та переріз розсіяння частинок*, ВПЦ “Київський університет”, К. (2014).

68. M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).
69. C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).
70. V.A. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press (2002).
71. P. Langacker, *The Standard Model and beyond*, CRC Press (2010).
72. T. Nakano and K. Nishijima, *Charge independence for v -particles*, *Prog. Theor. Phys.* **10** (1953) 581.
73. K. Nishijima, *Charge independence theory of v particles*, *Prog. Theor. Phys.* **13** (1955) 285.
74. M. Gell-Mann, *The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets*, *Nuovo Cim.* **4** (1956) 848.
75. D.S. Gorbunov and V.A. Rubakov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory*, World Scientific, Singapore (2017).
76. Y. Nagashima, *Elementary particle physics: foundations of the Standard model*, Wiley (2013).
77. J. Horejsi, *Introduction to electroweak unification. Standard model from tree unitarity*, World Scientific (1994).
78. S.M. Bilenky and S.T. Petcov, *Massive neutrinos and neutrino oscillations*, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 671.
79. F. Wilczek, *Origins of Mass*, *Central Eur. J. Phys.* **10** (2012) 1021 [1206.7114].
80. J.E. Kim, P. Langacker, M. Levine and H.H. Williams, *A theoretical and experimental review of the weak neutral current: a determination of its structure and limits on deviations from the minimal $SU(2)_L \times U(1)$ electroweak theory*, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 211.

81. О.М. Боярський, К.В. Бондаренко, "Інтенсив зі Стандартної Моделі для студентів спеціалізації "квантова теорія поля" фізичного факультету КНУ ім. Т. Шевченка."
82. S.F. Novaes, *Standard Model: An introduction*, in *Proceedings of the X J. A. Swieca Summer School*, World Scientific, Singapore (2000) [[hep-ph/0001283](#)].
83. W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics. Wave equations*, Springer (2000).
84. D.J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, 2nd revised ed. (2008).
85. J. Brandt, *T-invariant static Yang-Mills equations*, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 3067.
86. S. Mele, *Measurements of the running of the electromagnetic coupling at LEP (2006)*, [hep-ex/0610037](#).
87. CMS Collaboration, *Measurement and QCD analysis of double-differential inclusive jet cross-sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV and ratios to 2.76 and 7 TeV*, *JHEP* **03** (2017) 156 [[1609.05331](#)].
88. K.S. Kumar, S. Mantry, W.J. Marciano and P.A. Souder, *Low energy measurements of the weak mixing angle*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63** (2013) 237 [[1302.6263](#)].
89. Jefferson Lab Qweak Collaboration, *Precision measurement of the weak charge of the proton*, *Nature* **557** (2018) 207 [[1905.08283](#)].
90. J.C. Romão and J.P. Silva, *A resource for signs and Feynman diagrams of the Standard Model*, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012) 1230025 [[1209.6213](#)].
91. L.D. Faddeev and V.N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, *Phys. Lett. B* **25** (1967) 29.
92. L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Addison-Wesley (1991).

93. В.П. Гусинін, Е.В. Горбар, *Вступ до квантової теорії калібрувальних полів*, ВД “Академперіодика”, Київ (2024).
94. R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill (1965).
95. U. Mosel, *Path Integrals in Field Theory. An Introduction*, Springer, Berlin (2004).
96. G. Leibbrandt, *Introduction to Noncovariant Gauges*, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 1067.
97. A. Strumia and F. Vissani, *Neutrino masses and mixings and ...*, [hep-ph/0606054](#).
98. M.Ishitsuka (for the Super-Kamiokande Collaboration), *Super Kamiokande results: atmospheric and solar neutrinos (2004)*, [hep-ex/0406076](#).
99. T. Kajita, *Discovery of neutrino oscillations*, *Rept. Prog. Phys.* **69** (2006) 1607.
100. “President Clinton Addresses MIT.” <https://www.aip.org/fyi/1998/president-clinton-addresses-mit>, 1998.
101. F. Couchot et al., *Cosmological constraints on the neutrino mass including systematic uncertainties*, *Astron. Astrophys.* **606** (2017) A104 [[1703.10829](#)].
102. S.R. Choudhury and S. Hannestad, *Updated results on neutrino mass and mass hierarchy from cosmology with Planck 2018 likelihoods*, *JCAP* **07** (2020) 037 [[1907.12598](#)].
103. V. Lukovic, P. Cabella and N. Vittorio, *Dark matter in cosmology*, *Int. J. Mod. Phys. A* **29** (2014) 1443001 [[1411.3556](#)].
104. G. Bertone and D. Hooper, *History of dark matter*, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 045002 [[1605.04909](#)].
105. M. Cirelli, A. Strumia and J. Zupan, *Dark Matter (2024)*, [2406.01705](#).

106. E. Corbelli and P. Salucci, *The extended rotation curve and the dark matter halo of M33*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **311** (2000) 441 [[astro-ph/9909252](#)].
107. D. Clowe et al., *A direct empirical proof of the existence of dark matter*, *Astrophys. J.* **648** (2006) L109 [[astro-ph/0608407](#)].
108. E.M. Silich et al., *ICM-SHOX. I. Methodology Overview and Discovery of a Gas–Dark Matter Velocity Decoupling in the MACS J0018.5+1626 Merger*, *Astrophys. J.* **968** (2024) 74 [[2309.12533](#)].
109. T. Asaka, S. Blanchet and M. Shaposhnikov, *The ν MSM, Dark Matter and Neutrino Masses*, *Phys. Lett. B* **631** (2005) 151 [[hep-ph/0503065](#)].
110. T. Asaka and M. Shaposhnikov, *The ν MSM, Dark Matter and Baryon Asymmetry of the Universe*, *Phys. Lett. B* **620** (2005) 17 [[hep-ph/0505013](#)].
111. M. Shaposhnikov, *Baryon Asymmetry of the Universe and Neutrinos*, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009) 185.
112. C.B. Adams et al., *Axion Dark Matter*, in *Snowmass 2021*, 3, 2022 [[2203.14923](#)].
113. G. Arcadi, M. Dutra, P. Ghosh, M. Lindner, Y. Mambrini, M. Pierre et al., *The waning of the WIMP? A review of models, searches, and constraints*, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 203 [[1703.07364](#)].
114. M.Y. Khlopov, B.A. Malomed, I.B. Zeldovich and Y.B. Zeldovich, *Gravitational instability of scalar fields and formation of primordial black holes*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **215** (1985) 575.
115. B. Carr, F. Kühnel and M. Sandstad, *Primordial black holes as dark matter*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 083504 [[1607.06077](#)].
116. E.G.M. Ferreira, *Ultra-light dark matter*, *Astron. Astrophys. Rev.* **29** (2021) 7 [[2005.03254](#)].

117. T. Matos, L.A. Ureña López and J.-W. Lee, *Short review of the main achievements of the scalar field, fuzzy, ultralight, wave, BEC dark matter model*, *Front. Astron. Space Sci.* **11** (2024) 1347518 [2312.00254].
118. W.L. Freedman and B.F. Madore, *Progress in direct measurements of the Hubble constant*, *JCAP* **11** (2023) 050 [2309.05618].
119. “The accelerating Universe, Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2011, Royal Swedish Academy of Sciences.” <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/advanced-physicsprize2011.pdf>.
120. A.G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009 [astro-ph/9805201].
121. S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift Supernovae*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565 [astro-ph/9812133].
122. P.J.E. Peebles and B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 559 [astro-ph/0207347].
123. V. Sahni, *Dark matter and dark energy*, *Lect. Notes Phys.* **653** (2004) 141 [astro-ph/0403324].
124. M. Li, X.-D. Li, S. Wang and Y. Wang, *Dark energy: A brief review*, *Front. Phys.* **8** (2013) 828 [1209.0922].
125. D.S. Gorbunov and V.A. Rubakov, *Introduction to the Theory of the Early Universe, Vol. 2: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory*, World Scientific (2011).
126. S. Tsujikawa, *Introductory review of cosmic inflation*, in *2nd Tah Poe School on Cosmology: Modern Cosmology*, 4, 2003 [hep-ph/0304257].
127. A.D. Sakharov, *Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the Universe*, *JETP Lett.* **5** (1967) 24.
128. V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high-energy collisions*, *Phys. Usp.* **39** (1996) 461 [hep-ph/9603208].

129. G.A. White, *A Pedagogical Introduction to Electroweak Baryogenesis*, Morgan & Claypool Publishers (2016).
130. P. Schmidt-Wellenburg, *The quest to find an electric dipole moment of the neutron*, [1607.06609](#).
131. A. Czarnecki and B. Krause, *Neutron electric dipole moment in the standard model: Complete three-loop calculation of the valence quark contributions*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 4339 [[hep-ph/9704355](#)].
132. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland (1982).
133. N.V. Krasnikov, V.A. Matveev and A.N. Tavkhelidze, *CP violation problem in quantum chromodynamics*, *Sov. J. Part. Nucl.* **12** (1981) 38.
134. M.L. Sents, “Instantons in field theory.” <http://cds.cern.ch/record/920153/files/open-2006-002.pdf>, 2006.
135. A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz and Y.S. Tyupkin, *Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations*, *Phys. Lett. B* **59** (1975) 85.
136. G. t Hooft, *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle*, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 3432.
137. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume II: Modern Applications*, Cambridge University Press (1996).
138. G.V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons theory*, in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 69: Topological Aspects of Low-dimensional Systems*, 7, 1998 [[hep-th/9902115](#)].
139. S. Coleman, *The uses of instantons*, in *The Why’s of Subnuclear Physics*, A. Zichichi, ed., vol. 15 of *The Subnuclear Series*, (Boston NY), pp. 805–941, Springer (Plenum Press) (1979).
140. K. Fujikawa, *Path-integral measure for gauge-invariant fermion theories*, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1195.

141. S. Dar, *The Neutron EDM in the SM: A Review (2000)*, [hep-ph/0008248](#).
142. C. Eröncel, “DFSZ vs KSVZ Axions, DESY theory workshop seminar.” <https://indico.desy.de/event/29771/attachments/65522/80962/dsvz-ksvz.pdf>.
143. P.F. Perez and H.H. Patel, *The electroweak vacuum angle*, *Phys. Lett. B* **732** (2014) 241 [[1402.6340](#)].
144. H. Georgi and S.L. Glashow, *Unity of all elementary-particle forces*, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438.
145. H. Georgi, H.R. Quinn and S. Weinberg, *Hierarchy of interactions in unified gauge theories*, *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) 451.
146. G.G. Ross, *Grand Unified Theories*, Benjamin & Cummings (1985).
147. P. Langacker and M. Luo, *Implications of precision electroweak experiments for M_t , ρ_0 , $\sin^2 \theta_W$ and grand unification*, *Phys. Rev. D* **44** (1991) 817.
148. U. Amaldi, W. de Boer and H. Furstenau, *Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP*, *Phys. Lett. B* **260** (1991) 447.
149. D.I. Kazakov, *Beyond the standard model: In search of supersymmetry*, in *2000 European School of High-Energy Physics*, pp. 125–199, 8, 2000 [[hep-ph/0012288](#)].
150. D. Croon, T.E. Gonzalo, L. Graf, N. Košnik and G. White, *GUT physics in the era of the LHC*, *Front. Phys.* **7** (2019) 76 [[1903.04977](#)].
151. D. Kazakov, *Beyond the Standard Model’ 17*, *CERN Yellow Rep. School Proc.* **3** (2018) 83 [[1807.00148](#)].
152. S. Raychaudhuri, *The Higgs boson and its physics: an overview*, *Indian J. Phys.* **97** (2023) 3189 [[2304.07559](#)].
153. B.P. Abbott et al., *Tests of general relativity with GW150914*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 221101 [[1602.03841](#)].

154. R.P. Feynman, F.B. Morinigo and W.G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley (1995).
155. M. Sher, *Electroweak Higgs potentials and vacuum stability*, *Phys. Rept.* **179** (1989) 273.
156. F. Contino, *Impact of New Physics beyond the Standard Model on the Stability of the Electroweak Vacuum*, Ph.D. thesis, University of Catania, Catania, Italy, 2023.
157. D.V. Shirkov and N.N. Bogoliubov, *Quantum fields* (1983).
158. B. Delamotte, *A hint of renormalization*, *Am. J. Phys.* **72** (2004) 170 [[hep-th/0212049](#)].
159. S. Coleman and E. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888.
160. S.Y. Lee and A.M. Sciaccaluga, *Evaluation of higher order effective potentials with dimensional regularization*, *Nucl. Phys. B* **96** (1975) 435.
161. S.R. Coleman, *The fate of the false vacuum. 1. Semiclassical theory*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929.
162. C.G.J. Callan and S.R. Coleman, *The fate of the false vacuum. 2. First quantum corrections*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 1762.
163. M. Stone, *Lifetime and decay of excited vacuum states*, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 3568.
164. P.H. Frampton, *Vacuum instability and Higgs scalar mass*, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 1378.
165. M. Stone, *Semiclassical methods for unstable states*, *Phys. Lett. B* **67** (1977) 186.
166. P.H. Frampton, *Consequences of vacuum instability in quantum field theory*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2922.
167. V. Branchina and E. Messina, *Stability, Higgs boson mass and new physics*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 241801 [[1307.5193](#)].

168. P. Burda, R. Gregory and I. Moss, *The fate of the Higgs vacuum*, *JHEP* **06** (2016) 025 [[1601.02152](#)].
169. V. Branchina and E. Messina, *Stability and UV completion of the Standard Model*, *Europhys. Lett.* **117** (2017) 61002 [[1507.08812](#)].
170. C.G.J. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, *A new improved energy-momentum tensor*, *Annals Phys.* **59** (1970) 42.
171. N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press (1982).
172. V. Branchina, E. Bentivegna, F. Contino and D. Zappalà, *Direct Higgs-gravity interaction and stability of our Universe*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 096029 [[1905.02975](#)].
173. S. Alekhin et al., *A facility to search for hidden particles at the CERN SPS: the SHiP physics case*, *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016) 124201 [[1504.04855](#)].
174. D. Curtin et al., *Long-lived particles at the energy frontier: The MATHUSLA physics case*, *Rept. Prog. Phys.* **82** (2019) 116201 [[1806.07396](#)].
175. D.I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory* (2008), [0901.2208](#).
176. J. Beacham et al., *Physics beyond colliders at CERN: Beyond the Standard Model working group report*, *J. Phys. G* **47** (2020) 010501 [[1901.09966](#)].
177. C. Ahlida et al., *The experimental facility for the Search for Hidden Particles at the CERN SPS*, *JINST* **14** (2019) P03025 [[1810.06880](#)].
178. “Ship collaboration.” <https://ship.web.cern.ch>.
179. E. Gross, *Practical Statistics for High Energy Physics*, *CERN Yellow Rep. School Proc.* **3** (2018) 199.

180. I. Boiarska, K. Bondarenko, A. Boyarsky, V. Gorkavenko, M. Ovchinnikov and A. Sokolenko, *Phenomenology of GeV-scale scalar portal*, *JHEP* **2019** (2019) 162 [[1904.10447](#)].
181. CMS Collaboration, *Search for invisible decays of a Higgs boson produced through vector boson fusion in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV*, *Phys. Lett. B* **793** (2019) 520 [[1809.05937](#)].
182. A.D. Linde, *Phase transitions in gauge theories and cosmology*, *Rept. Prog. Phys.* **42** (1979) 389.
183. M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *Complex Spinors and Unified Theories*, *Conf. Proc. C* **790927** (1979) 315 [[1306.4669](#)].
184. T. Yanagida, *Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos*, in *Proceedings of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*, (Tsukuba, Japan), pp. 95–99, 1979, <https://inspirehep.net/literature/143150>.
185. С.Й. Вільчинський, В.М. Горкавенко, *Вступ до фізики масивних нейтрино*, Сучасні Печатні Технології “Бавок”, К. (2010).
186. A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, D. Iakubovskiy and J. Franse, *An unidentified line in X-ray spectra of the Andromeda galaxy and Perseus galaxy cluster*, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 251301 [[1402.4119](#)].
187. E. Bulbul, M. Markevitch, A. Foster, R.K. Smith, M. Loewenstein and S.W. Randall, *Detection of an unidentified emission line in the stacked X-ray spectrum of galaxy clusters*, *Astrophys. J.* **789** (2014) 13 [[1402.2301](#)].
188. K. Bondarenko, A. Boyarsky, D. Gorbunov et al., *Phenomenology of GeV-scale heavy neutral leptons*, *JHEP* **2018** (2018) 032 [[1805.08567](#)].
189. A. Boyarsky, M. Drewes, T. Lasserre, S. Mertens and O. Ruchayskiy, *Sterile neutrino dark matter*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **104** (2019) 1 [[1807.07938](#)].

190. L.B. Okun, *Limits of electrodynamics: paraphotons?*, *Sov. Phys. JETP* **56** (1982) 502.
191. B. Holdom, *Two $U(1)$'s and epsilon charge shifts*, *Phys. Lett. B* **166** (1986) 196.
192. SHiP Collaboration, “Ship sensitivity to dark photons.”
<https://cds.cern.ch/record/2214092>.
193. G. D’Ambrosio, G.F. Giudice, G. Isidori and A. Strumia, *Minimal flavor violation: An effective field theory approach*, *Nucl. Phys. B* **645** (2002) 155 [[hep-ph/0207036](#)].
194. M. Fabbrichesi, E. Gabrielli and G. Lanfranchi, *The Dark Photon*, **2005.01515**.
195. J.A. Dror, R. Lasenby and M. Pospelov, *Light vectors coupled to bosonic currents*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 055016 [[1811.00595](#)].
196. R. Clarkson and D.G.C. McKeon, *Quantum Field Theory* (2003).
197. J. Preskill, *Gauge anomalies in an effective field theory*, *Annals Phys.* **210** (1991) 323.
198. R.D. Peccei and H.R. Quinn, *CP conservation in the presence of pseudoparticles*, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440.
199. D.J.E. Marsh, *Axions and ALPs: a very short introduction (2017)*, **1712.03018**.
200. I.E. Halperin and A. Zhitnitsky, *Axion potential, topological defects and CP odd bubbles in QCD*, *Phys. Lett. B* **440** (1998) 77 [[hep-ph/9807335](#)].
201. A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis and R. Rattazzi, *Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion*, *JHEP* **10** (2006) 014 [[hep-th/0602178](#)].
202. S. Weinberg, *A new light boson?*, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 223.
203. F. Wilczek, *Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons*, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 279.

204. A.R. Zhitnitsky, *Possible suppression of axion-hadron interactions*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **31** (1980) 260.
205. M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, *A simple solution to the strong CP problem with a harmless axion*, *Phys. Lett. B* **104** (1981) 199.
206. J.F. Gunion, H.E. Haber, G.L. Kane and S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide*, CRC Press, Boca Raton (1990).
207. F. Kling, S. Su and W. Su, *2HDM Neutral Scalars under the LHC*, *JHEP* **06** (2020) 163 [[2004.04172](#)].
208. J.E. Kim, *Weak-interaction singlet and strong CP invariance*, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 103.
209. M.A. Shifman, A.I. Vainshtein and V.I. Zakharov, *Can confinement ensure natural CP invariance of strong interactions?*, *Nucl. Phys. B* **166** (1980) 493.
210. A. Halprin, C.M. Andersen and H. Primakoff, *Photonic Decay Rates and Nuclear-Coulomb-Field Coherent Production Processes*, *Phys. Rev.* **152** (1966) 1295.
211. J. Jaeckel and A. Ringwald, *The low-energy frontier of particle physics*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **60** (2010) 405 [[1002.0329](#)].
212. A. De Angelis, G. Galanti and M. Roncadelli, *Relevance of axion-like particles for very-high-energy astrophysics*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 105030.
213. I. Antoniadis, A. Boyarsky, S. Espahbodi, O. Ruchayskiy and J.D. Wells, *Anomaly driven signatures of new invisible physics at the large hadron collider*, *Nucl. Phys. B* **824** (2010) 296 [[0901.0639](#)].
214. V. Gorkavenko, I. Hrynychak, O. Khasai and M. Tsarenkova, *Extension of the Standard Model with Chern-Simons type interaction*, *Ukr. J. Phys.* **69** (2024) 832 [[2412.18691](#)].
215. M. Acciarri et al., *Search for new physics in energetic single photon production in e^+e^- annihilation at the Z resonance*, *Phys. Lett. B* **412** (1997) 201.

216. J.A. Harvey, *Tasi 2003 lectures on anomalies, Published in "Progress in String Theory ", TASI 2003 proceedings*, [hep-th/0509097](#).
217. J.A. Dror, R. Lasenby and M. Pospelov, *New constraints on light vectors coupled to anomalous currents*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) [141803](#) [[1705.06726](#)].
218. J.A. Dror, R. Lasenby and M. Pospelov, *Dark forces coupled to nonconserved currents*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 075036 [[1707.01503](#)].
219. Y. Borysenkova, P. Kashko, M. Tsarenkova, K. Bondarenko and V. Gorkavenko, *Production of Chern-Simons bosons in decays of mesons*, *J. Phys. G* **49** (2022) 085003 [[2110.14500](#)].
220. N. Canzano, "An overview of SU(5) grand unification, Lecture Notes, University of California, Santa Cruz (march 2016)."
https://scipp.ucsc.edu/~haber/ph218/GUT_presentation_Canzano.pdf, 2016.
221. H. Georgi, *Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin To Unified Theories*, CRC Press (2019).
222. J.C. Baez and J. Huerta, *The algebra of grand unified theories*, *Bull. Am. Math. Soc.* **47** (2010) 483 [[0904.1556](#)].
223. P. Nath and P.F. Perez, *Proton stability in grand unified theories, in strings, and in branes*, *Phys. Rept.* **441** (2007) 191 [[hep-ph/0601023](#)].
224. A. Takenaka et al., *Search for proton decay via $p \rightarrow e^+ \pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ with an enlarged fiducial volume in Super-Kamiokande I-IV*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 112011 [[2010.16098](#)].
225. H. Georgi and C. Jarlskog, *A new lepton-quark mass relation in a unified theory*, *Phys. Lett. B* **86** (1979) 297.
226. R. Slansky, *Group theory for unified model building*, *Phys. Rept.* **79** (1981) 1.

- 227. S. Antusch and M. Spinrath, *New GUT predictions for quark and lepton mass ratios confronted with phenomenology*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 095004 [[0902.4644](#)].
- 228. J.P. Elliott and P.G. Dawber, *Symmetry in Physics*, Macmillan, London (1979–1984).
- 229. О.Г. Ситенко, В.К. Тартаковський, *Теорія ядра*, Либідь, Київ (2000).